

مرورنامه آزمون آزمایشی خیلی سبز

سال تحصیلی ۱۴۰۴-۰۵



مرحله هشتم

پایه دوازدهم

این مرورنامه، ویژه مباحث جدید آزمون است. مرورنامه مباحثی که در آزمون‌های قبل به آن‌ها پرداخته شده، در پنل کاربری شما قابل دریافت است و در این فایل از تکرار آن پرهیز شده است.

نام درس	مباحث	مؤلف	ویراستار	از صفحه	تا صفحه
حسابان و ریاضیات پایه	ریاضی دهم: فصل ۲ صفحه ۲۸ تا ۴۶ حسابان ۱ یازدهم: فصل ۴ صفحه ۹۱ تا ۱۱۲ حسابان ۲ دوازدهم: فصل ۱ (درس ۲) و فصل ۲ صفحه ۱۳ تا ۴۴	علی شهبازی	مهدی خوشنویس ابوالفضل ناصری سینا نیک‌نژاد	۲	۹
هندسه	هندسه دهم: فصل ۳ صفحه ۵۳ تا ۷۶ هندسه دوازدهم: فصل ۱ (درس ۲) و فصل ۲ (درس ۱) صفحه ۲۲ تا ۳۹	علیرضا نصراللهی	شقایق راهبریان محسن فراهانی بردیا نصیری سینا نیک‌نژاد	۹	۱۴
ریاضیات گسسته و آمار و احتمال	ریاضیات گسسته دوازدهم: فصل ۱ (درس ۲ و ۳) صفحه ۹ تا ۳۰	سروش موثینی	محسن فراهانی پیام ابراهیم‌نژاد مهدی خوشنویس سینا نیک‌نژاد	۱۴	۱۷
فیزیک	فیزیک دهم: فصل ۴ صفحه ۸۳ تا ۱۲۶ فیزیک دوازدهم: فصل ۱ (از ابتدای حرکت با شتاب ثابت) و فصل ۲ (تا ابتدای تکانه و قانون دوم نیوتن) صفحه ۱۵ تا ۴۶	داوود پاشا نوبید شاهی	امین امینی نرجس تمیناک کسری شاهین‌زاده	۱۸	۲۸
شیمی	شیمی دهم: فصل ۲ (از ابتدای رفتار گازها) و فصل ۳ (تا ابتدای محلول و مقدار حل‌شونده‌ها) صفحه ۷۶ تا ۹۲ شیمی دوازدهم: فصل ۱ (از ابتدای ثابت تعادل و قدرت اسیدی) و فصل ۲ (تا ابتدای سلول سوختی) منبعی برای تولید انرژی سبز صفحه ۲۰ تا ۵۰	سروش عبادی عباس سرمایه معصومه سعیدی	بنیامین یعقوبی مهدی محمدی	۲۸	۴۰

ویژه کنکوری‌های ۱۴۰۵

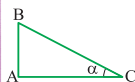




مفاهیم

۱ نسبت‌های مثلثاتی در مثلث قائم‌الزاویه:

نسبت	تعریف	برای زاویه α در شکل مقابل
سینوس	$\frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}}$	$\sin \alpha = \frac{AB}{BC}$
کسینوس	$\frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}}$	$\cos \alpha = \frac{AC}{BC}$
تانژانت	$\frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}}$	$\tan \alpha = \frac{AB}{AC}$
کوتانژانت	$\frac{\text{مجاور}}{\text{مقابل}}$	$\cot \alpha = \frac{AC}{AB}$



۲ نسبت‌های مثلثاتی زوایای مهم:

	0°	30°	45°	60°	90°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	تن
cot	تن	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

۳ مساحت مثلث:

شکل	فرمول	مقادیری که داریم
	$\frac{a \cdot h_a}{2}$	۱ قاعده و ارتفاع وارد بر آن
	$\frac{1}{2} ab \sin \hat{C}$	۲ دو ضلع و زاویه بین
	$\sqrt{\frac{p}{2}(p-a)(p-b)(p-c)}$ نصف محیط	۳ سه ضلع (هرون)
	$\frac{ (x_A y_B + x_B y_C + x_C y_A) - (x_B y_A + x_C y_B + x_A y_C) }{2}$	۴ مختصات سه رأس

۴ مساحت چهارضلعی:

شکل	فرمول	مقادیری که داریم
	$ab \sin \alpha$ یا α'	۱ دو ضلع و زاویه بین در متوازی‌الاضلاع
	$\frac{1}{2} cd \sin \theta$ یا θ'	۲ دو قطر و زاویه بین در هر چهارضلعی محدب



مرورنامه آزمون آزمایشی خیل سبز

حسابان

۵ شش ضلعی منتظم:

مساحت	قطر کوچک	قطر بزرگ	قطر کوچک (d')
$6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$	$d' = a\sqrt{3}$	$d = 2a$	
مساحت مثلث متساوی الاضلاع			قطر بزرگ (d)

۶ رابطه سینوس ها و کسینوس ها در مثلث:

اسم رابطه	فرمول	زمان استفاده
سینوس ها	$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$	رابطه بین دو اضلاع و زوایای روبه رویشان
کسینوس ها	$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A}$	رابطه بین سه ضلع و یکی از زوایا

۷ نمایش نسبت های مثلثاتی روی دایره:

	برای آن که سینوس و کسینوس یک زاویه دلخواه روی دایره مثلثاتی را نشان دهیم کافی است از نقطه انتهای کمانش به محورهای سینوس و کسینوس عمود کنیم.	نمایش sin و cos
	برای نمایش تانژانت و کتانژانت یک زاویه کافی است ضلع دوم زاویه را از دو طرف امتداد دهیم تا محورهای تانژانت و کتانژانت را قطع کند. نقطه برخوردش با این محورها، tan theta و cot theta را نشان می دهد.	نمایش cot و tan

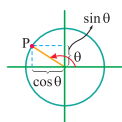
۸ علامت نسبت های مثلثاتی در ۴ ناحیه دایره مثلثاتی:

ناحیه	محدوده	sin	cos	tan	cot
اول	$0^\circ < x < 90^\circ$ یا $0 < x < \frac{\pi}{2}$	+	+	+	+
دوم	$90^\circ < x < 180^\circ$ یا $\frac{\pi}{2} < x < \pi$	+	-	-	-
سوم	$180^\circ < x < 270^\circ$ یا $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$	-	-	+	+
چهارم	$270^\circ < x < 360^\circ$ یا $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$	-	+	-	-

۹ مختصات هر نقطه روی دایره مثلثاتی به صورت $P(\cos \theta, \sin \theta)$ است.

۱۰ محاسبه سایر نسبت های مثلثاتی با داشتن یکی از آنها (بدون استفاده از اتحادها):

مثلاً فرض کنید $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ و دو ربع چهارم است و $\cot \alpha$ را می خواهیم. ابتدا با این که α در ربع چهارم است کاری نداریم.



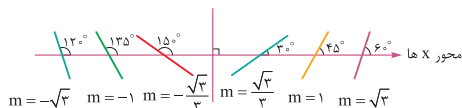
	گام ۱ با توجه به تعریف کسینوس که می شد اندازه ضلع مجاور به وتر، مثلث قائم الزاویه ای مثل شکل روبه رو می کشیم.
	گام ۲ ضلع سوم را با فیثاغورس درمی آوریم: $x = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$
$\cot \alpha = \frac{\text{مجاور}}{\text{مقابل}} = \frac{3}{4}$	گام ۳ حالا کتانژانت α را طبق تعریف می نویسیم و علامتش را با توجه به قراردادن آن در ربع چهارم می گذاریم.



مرورنامه آزمون آزمایشی خیلی سبز

حسابان

۱۱) تانژانت زاویه‌ای که هر خطی با جهت مثبت محور X می‌سازد، برابر با شیب آن خط است: $m = \tan \alpha$



۱۲) اتحادهای اولیه مثلثات:

صورت اصلی اتحاد	صورت فرعی اتحاد
$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$	$1 - \sin^2 x = \cos^2 x$
$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$	$1 - \cos^2 x = \sin^2 x$
$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$	$\tan x \cdot \cot x = 1$
$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\cot x = \frac{1}{\tan x}$
$1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$	-

۱۳) اتحادهای وابسته به $\sin 2x$: $(\sin 2x = 2 \sin x \cos x)$

اتحاد برحسب $\sin x \cos x$	برحسب $\sin 2x$
$(\sin x \pm \cos x)^2 = 1 \pm 2 \sin x \cos x$	$= 1 \pm \sin 2x$
$\tan x + \cot x = \frac{1}{\sin x \cos x}$	$= \frac{2}{\sin 2x}$
$\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x$	$= 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x$
$\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 3 \sin^2 x \cos^2 x$	$= 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x$

۱۴) هر وقت تساوی به شکل $\sin A \pm \cos A = k$ داشتید، دو طرف را به توان ۲ برسانید.

رادیان

۱) نکات اولیه رادیان:

تعریف ۱ رادیان	زاویه مرکزی روبه‌رو به کمانی که طولش برابر با شعاع دایره است:	
تقریب ۱ رادیان برحسب درجه	$1 \text{ rad} \approx 57.3^\circ$	
مرزها برحسب رادیان		
رابطه بین درجه و رادیان	$\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi}$ یا $(180^\circ = \pi \text{ رادیان})$	
تبدیل سریع درجه به رادیان و برعکس	$D \xrightarrow{\times \frac{\pi}{180}} R$ $R \xrightarrow{\times \frac{180}{\pi}} D$	



مرورنامه آزمون آزمایشی خیل سبز

حسابان

۲) زوایای مهم برحسب درجه و رادیان:

۱۵°	۳۰°	۴۵°	۶۰°	۷۵°	۹۰°	۱۲۰°	۱۳۵°	۱۵۰°	۱۸۰°	۲۱۰°	۲۲۵°	۲۴۰°	۲۷۰°	۳۰۰°	۳۱۵°	۳۳۰°	۳۶۰°
$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π

۳) طول کمان روبه‌رو به زاویه θ رادیان در دایره‌ای به شعاع r :



$$\ell = r\theta$$

برحسب رادیان

۴) در سوالات «چرخیدن دو قرقره متصل به یک تسمه» یا «چرخیدن دو چرخ وسیله‌ای که چرخ‌های نابرابر دارد»، شروع حل، با برابر قرار دادن طول کمان‌های طی شده است:

$$\ell_1 = \ell_2 \Rightarrow r_1\theta_1 = r_2\theta_2 \Rightarrow \dots$$

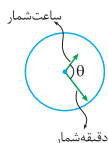
۵) قطاع:

مساحت	محیط	شکل
$\frac{1}{2}\theta r^2$	$\ell + 2r$ یا $r\theta + 2r$	

۶) گسترده مخروط:

شکل	روابط بین قطاع و مخروط	دو رابطه مهم در مخروط
	(۱) مولد مخروط با شعاع قطاع برابر است: $L = r_{\text{قطاع}}$ (۲) محیط قاعده مخروط با طول کمان قطاع برابر است: $P_{\text{قاعده}} = \ell \Rightarrow 2\pi r_p = r_{\text{قطاع}}\theta$	(۱) $L = \sqrt{r_p^2 + h^2}$ (۲) $S_{\text{جانبی}} = \pi r_p L$

۷) زاویه بین عقربه ساعت‌شمار و دقیقه‌شمار در ساعت h و m دقیقه:



$$\Rightarrow \theta = \left| \frac{11}{2}m - 30h \right| \text{ به درجه}$$

نسبت‌های مثلثاتی زوایای $\frac{k\pi}{2} \pm \alpha$

۱) زوایای متمم، مکمل، قرینه و هم‌پایان:

تعریف	متمم	مکمل	قرینه	هم‌پایان
دو زاویه که مجموعشان ۹۰° است.	دو زاویه که مجموعشان ۱۸۰° است.	قرینه θ یعنی $-\theta$	زوایایی که اختلافشان مضربی از ۳۶۰° است.	
برای زاویه θ	$\frac{\pi}{2} - \theta$ یا $90^\circ - \theta$	$\pi - \theta$ یا $180^\circ - \theta$	$-\theta$	$2k\pi + \theta$ یا $360^\circ k + \theta$
روی دایره				
رابطه با نسبت‌های زاویه θ	قرینه نسبت به $y = x$	قرینه نسبت به محور y ها	قرینه نسبت به محور x ها	یک یا چند دور کامل می‌زند.
	$\sin$ یکی با $\cos$ دیگری و $\tan$ یکی با $\cot$ دیگری برابر است و بالعکس.	$\sin$ ها برابر و بقیه قرینه هم هستند.	$\cos$ ها برابر و بقیه قرینه هم هستند. (کسینوس منفی را می‌خورد!)	همه‌چی ثابت می‌ماند.
مثال	$\sin 20^\circ = \cos 70^\circ$	$\sin 120^\circ = \sin 60^\circ$	$\cos(-30^\circ) = \cos 30^\circ$	$\sin 390^\circ = \sin 30^\circ$



۲ نوشتن نسبت‌های مثلثاتی زوایای $\frac{k\pi}{\pi} \pm \alpha$ برحسب زویه α در ۳ مرحله،

مرحله ۱	$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$	اگر کمان از $\frac{\pi}{2}$ بیشتر بود، مجاز هستیم مضارب $\frac{\pi}{2}$ را از آن کم کنیم تا به زاویه‌ای در محدوده 0 تا $\frac{\pi}{2}$ برسیم.
مرحله ۲	تغییر اسم می‌دهد یا نه	اگر π یا $\frac{\pi}{2}$ داشتیم، نسبت مثلثاتی عوض نمی‌شود ولی اگر $\frac{\pi}{2}$ یا $\frac{\pi}{2}$ داشتیم، $\sin$ به $\cos$ (و بالعکس) و $\tan$ به $\cot$ (و بالعکس) تبدیل می‌شود.
مرحله ۳	علامت + یا -	α را زاویه‌ای در ربع اول (مثلاً 1°) در نظر می‌گیریم و با توجه به آن، محدوده زاویه $\frac{k\pi}{\pi} \pm \alpha$ را مشخص و علامت نسبت را تعیین می‌کنیم.

مثال $\sin(\frac{7\pi}{2} - \alpha)$

$$\sin(\frac{7\pi}{2} - \alpha) = \sin(\frac{3\pi}{2} - \alpha)$$

مرحله ۱، $\frac{7\pi}{2}$ را از $\frac{\pi}{2}$ کم می‌کنیم:

مرحله ۲، با فرض $\alpha = 1^\circ$ ، زاویه $\frac{3\pi}{2} - \alpha$ می‌شود 26° که در ربع ۳ قرار دارد و در این ربع $\sin$ منفی است.

پس:

$$\sin(\frac{7\pi}{2} - \alpha) = -\cos \alpha$$

۳ جدول نسبت‌های مثلثاتی زوایای $\frac{k\pi}{\pi} \pm \alpha$ (در ربع اول قرار دارد):

	$\frac{\pi}{2} - \alpha$	$\frac{\pi}{2} + \alpha$	$\pi - \alpha$	$\pi + \alpha$	$\frac{3\pi}{2} - \alpha$	$\frac{3\pi}{2} + \alpha$	$2\pi - \alpha$	$2\pi + \alpha$
تغییر اسم می‌دهد یا نمی‌دهد	+	+	-	-	+	+	-	-
ناحیه (ربع) زاویه جدید	۱	۲	۲	۳	۳	۴	۴	۱
$\sin$	$\cos \alpha$	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$\sin \alpha$
$\cos$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\cos \alpha$
$\tan$	$\cot \alpha$	$-\cot \alpha$	$-\tan \alpha$	$\tan \alpha$	$\cot \alpha$	$-\cot \alpha$	$-\tan \alpha$	$\tan \alpha$
$\cot$	$\tan \alpha$	$-\tan \alpha$	$-\cot \alpha$	$\cot \alpha$	$\tan \alpha$	$-\tan \alpha$	$-\cot \alpha$	$\cot \alpha$

۴ برای آن که کسرهایی به فرم $\frac{a \sin \alpha + b \cos \alpha}{c \sin \alpha + d \cos \alpha}$ را برحسب $\tan \alpha$ بنویسیم، باید همه نسبت‌ها را به $\cos \alpha$ تقسیم کنیم:

$$\frac{a \sin \alpha + b \cos \alpha}{c \sin \alpha + d \cos \alpha} = \frac{a \tan \alpha + b}{c \tan \alpha + d}$$

۵ برای ساده کردن عبارت‌هایی به فرم $a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = d$ ، دو طرف را بر $\cos^2 x$ (یا $\sin^2 x$) تقسیم می‌کنیم تا بتوانیم عبارت را برحسب $\tan x$ (یا $\cot x$) بنویسیم.

توابع مثلثاتی

نمودار توابع مثلثاتی:

صفرهای تابع	طول نقاط min	طول نقاط max	دوره تناوب	بُرد	دامنه	ضابطه تابع
$y = \sin x$	$2k\pi + \frac{3\pi}{2}$	$2k\pi + \frac{\pi}{2}$	2π	$[-1, 1]$	$\mathbb{R}$	
$y = \cos x$	$2k\pi + \pi$	$2k\pi$	2π	$[-1, 1]$	$\mathbb{R}$	



مرورنامه آزمون آزمایشی خیال سبز

حسابان

صفه‌های تابع	طول نقاط min	طول نقاط max	دوره تناوب	بُرد	دامنه	ضابطه تابع
$y = \tan x$	$k\pi$	-	π	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R} - \{(2k+1)\frac{\pi}{2}\}$	
$y = \cot x$	$k\pi + \frac{\pi}{2}$	-	π	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R} - \{k\pi\}$	

توابع متناوب

۱ می‌گوییم f تابعی متناوب است، اگر عدد مثبتی مثل T پیدا شود که هر دو شرایط زیر برقرار باشد:

• $f(x+T) = f(x)$

• اگر $x \in D_f$ بود، آن $(x+T) \in D_f$ باشد.

به کوچک‌ترین مقدار مثبت T ، دوره تناوب تابع می‌گوییم.

۲ اگر مساحت بین تابع متناوب f و محور X در بازه‌ای به طول T برابر S باشد، مساحت بین تابع f و محور X در بازه‌هایی به طول $k \times T$ ، برابر با $k \times S$ است.

(عدد طبیعی)

۳ دوره تناوب‌هایی که باید حفظ باشیم.

جنس تابع	توضیح	قیافه	دوره تناوب	مثال
sin, cos	توان فرد	$\cos^{(2x+1)}(ax), \sin^{(2x+1)}(ax)$	$\frac{2\pi}{ a }$	$\sin 3x \Rightarrow \frac{2\pi}{3}$
	توان زوج و قدرمطلق	$\cos^{2x} ax, \sin^{2x} ax$ $ \cos ax , \sin ax $	$\frac{\pi}{ a }$	$\sin^2 6x \Rightarrow \frac{\pi}{6}$ $ \cos \pi x \Rightarrow \frac{\pi}{\pi} = 1$
tan, cot	توان فرد	$\cot^{(2x+1)}(ax), \tan^{(2x+1)}(ax)$	$\frac{\pi}{ a }$	$\tan^2 2x \Rightarrow \frac{\pi}{2}$
	توان زوج و قدرمطلق	$\cot^{2x} ax, \tan^{2x} ax$ $ \cot ax , \tan ax $	$\frac{\pi}{ a }$	$\cot^2 \frac{x}{4} \Rightarrow \frac{\pi}{\frac{1}{4}} = 4\pi$ $ \tan \frac{\pi}{3} x \Rightarrow \frac{\pi}{\frac{\pi}{3}} = 3$
براکتی		$ax - [ax]$ $[ax] + [-ax]$	$\frac{1}{ a }$	$2x - [2x] \Rightarrow \frac{1}{2}$ $[\frac{x}{3}] + [-\frac{x}{3}] \Rightarrow \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$
		$(-1)^{[ax]}$	$\frac{2}{ a }$	$(-1)^{[\frac{x}{2}]} \Rightarrow \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4$

۴ برای عبارتهای به فرم $a \sin(bx+d) + c$ و $a \cos(bx+d) + c$ داریم:

فرمول	فرمول به فارسی!	مثال در $5 - \sin(6x)$
max $ a + c$	عدد بیرونی + ضرب پست sin یا cos	$ 5 + (-1) = 4$
min $- a + c$	عدد بیرونی - ضرب پست sin یا cos	$- 5 + (-1) = -6$



مرورنامه آزمون آزمایشی خیلی سبز

حسابان

۵ به دست آوردن ضرایب مجهول در توابع به فرم $y = a \cos(bx) + c$ یا $y = a \sin(bx) + c$

گام	چه کار می‌کنیم؟	توضیح
۱	ساده کردن	اگر ضابطه ساده می‌شد، حتماً ساده می‌کنیم. مثلاً جای $\sin(\frac{\pi}{4} - x)$ می‌نویسیم $\frac{\sqrt{2}}{2} \cos x$.
۲	دوره تناوب	اگر از روی شکل دوره تناوب معلوم بود، $\frac{2\pi}{ b }$ را با آن برابر قرار می‌دهیم تا b به دست آید.
۳	$\min, \max$	اگر مقدار $\min$ و $\max$ روی نمودار معلوم بود، از معادلات $\max = a + c$ و $\min = - a + c$ مقدار $ a $ و c را حساب می‌کنیم.
۴	نقطه کمکی	اگر مختصات نقطه‌ای از نمودار معلوم بود، آن را در ضابطه جای‌گذاری می‌کنیم تا یک معادله به ما بدهد.

۶ پیدا کردن علامت a و b در توابع $y = a \cos(bx) + c$ و $y = a \sin(bx) + c$

نمودار سینوسی	نمودار کسینوسی
شکل نمودار در سمت راست محور y ‌ها	شکل نمودار در سمت راست محور y ‌ها
شبه به ...	شبه به ...
علامت a و b	علامت a و b

روابط مثلثاتی مجموع و تفاضل زوایا

۱ اتحادهای $\alpha \pm \beta$

$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$	جمع	سینوس
$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha$	تفاضل	سینوس
$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$	جمع	کسینوس
$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$	تفاضل	کسینوس
$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$	جمع	تانژانت
$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$	تفاضل	تانژانت

۲ برای محاسبه نسبت‌های مثلثاتی زوایای 15° ، 75° ، 105° و ... از اتحادهای بالا استفاده می‌کنیم.

۳ اتحادهای 2α

$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$	اتحاد	سینوس
$\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$	نتیجه	سینوس
$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$	اتحاد	کسینوس
$1 + \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha$ $1 - \cos 2\alpha = 2 \sin^2 \alpha$	نتایج	کسینوس
$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$	اتحاد	تانژانت

۴ اتحادهای 3α

$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$
$\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$



مرورنامه آزمون آزمایشی خیلی سبز

حسابان

۵ نسبت‌های مثلثاتی زوایای ۱۵° و (۷۵°) و $۲۲/۵^\circ$ و $(۶۷/۵^\circ)$ را بلد باشید.

	sin	cos	tan	cot
$۱۵^\circ = \frac{\pi}{۱۲}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{۴}$ یا $\frac{\sqrt{۲}-\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{۴}$ یا $\frac{\sqrt{۲}+\sqrt{۳}}{۲}$	$۲-\sqrt{۳}$	$۲+\sqrt{۳}$
$۷۵^\circ = \frac{۵\pi}{۱۲}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{۴}$ یا $\frac{\sqrt{۲}+\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{۴}$ یا $\frac{\sqrt{۲}-\sqrt{۳}}{۲}$	$۲+\sqrt{۳}$	$۲-\sqrt{۳}$
$۲۲/۵^\circ = \frac{\pi}{۸}$	$\frac{\sqrt{۲}-\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}+\sqrt{۲}}{۲}$	$\sqrt{۲}-۱$	$\sqrt{۲}+۱$
$۶۷/۵^\circ = \frac{۳\pi}{۸}$	$\frac{\sqrt{۲}+\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}-\sqrt{۲}}{۲}$	$\sqrt{۲}+۱$	$\sqrt{۲}-۱$

برای به دست آوردن سینوس و کسینوس زوایای ۱۵° و $۲۲/۵^\circ$ از دو اتحاد $۱+\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha$ و $۱-\cos 2\alpha = 2\sin^2 \alpha$ استفاده می‌کنیم.

۶ اتحادهای تکمیلی

۱	$\sin \alpha \pm \cos \alpha = \sqrt{۲} \sin(\alpha \pm \frac{\pi}{۴})$
۲	$\tan \alpha + \cot \alpha = \frac{۲}{\sin 2\alpha}$
۳	$\cot \alpha - \tan \alpha = ۲ \cot 2\alpha$
۴	$\tan \alpha + \tan \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$
۵	$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = ۱ - ۲\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = ۱ - \frac{۱}{۲} \sin^2 2\alpha$
۶	$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = ۱ - ۲\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = ۱ - \frac{۳}{۴} \sin^2 2\alpha$

۷ چند تکنیک

اگر عبارت‌مان به شکل $\cos \alpha \cos 2\alpha \cos 4\alpha \dots$ بود باید خودمان $\sin \alpha$ را در آن ضرب کنیم و بعد از ساده کردن، جواب به دست آمده را بر $\sin \alpha$ تقسیم کنیم.

مثال $\cos ۱^\circ \cdot \cos ۲^\circ \cdot \cos ۴^\circ \xrightarrow[\sin ۱^\circ]{\frac{1}{2} \sin ۲^\circ} \frac{\frac{1}{2} \sin ۲^\circ \cdot \cos ۲^\circ \cdot \cos ۴^\circ}{\sin ۱^\circ} = \frac{\frac{1}{4} \sin ۴^\circ \cdot \cos ۴^\circ}{\sin ۱^\circ} = \frac{\frac{1}{8} \sin ۸^\circ}{\sin ۱^\circ} = \frac{1}{8} \tan ۸^\circ$

برای ساده کردن عبارت‌های به فرم $a \sin \alpha + b \cos \alpha$ از $\sqrt{a^2 + b^2}$ فاکتور می‌گیریم و بعد آن را به شکل ضربی از $\sin(\alpha + \beta)$ می‌نویسیم.

مثال $\sin ۱^\circ + \sqrt{۳} \cos ۱^\circ \xrightarrow[\frac{1}{2} \sin ۱^\circ + \frac{\sqrt{۳}}{۲} \cos ۱^\circ]{\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{1+۳}=۲} ۲(\frac{1}{۲} \sin ۱^\circ + \frac{\sqrt{۳}}{۲} \cos ۱^\circ) = ۲(\cos ۶^\circ \sin ۱^\circ + \sin ۶^\circ \cos ۱^\circ) = ۲ \sin(۱^\circ + ۶^\circ) = ۲ \sin ۷^\circ$

هئدسبه

پایه دهم

فصل سوم

n ضلعی		
مجموع زوایای داخلی	تعداد کل قطرهای	قطرهای گذرنده از یک رأس
$(n-۲) \times ۱۸۰^\circ$	$\frac{n(n-۳)}{۲}$	$n-۲$



چهارضلعی‌های خاص -

● متوازی‌الاضلاع: چهارضلعی که هر دو ضلع مقابل آن با هم موازی باشند.

(۱) یک چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است اگر و تنها اگر ضلع‌های مقابل آن دوتایی دوتایی هم‌اندازه باشند. $AB = CD$ $AD = BC$ $AB \parallel CD$	(۲) یک چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است اگر و تنها اگر دو ضلع مقابل، موازی و مساوی باشند. $AB = CD$ $AD \parallel BC$
(۳) یک چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است اگر و تنها اگر زوایای مقابل با هم برابر باشند. $\hat{A} = \hat{C}$ $\hat{B} = \hat{D}$	(۴) یک چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است اگر و تنها اگر هر دو زاویه مجاور آن مکمل باشند. $\alpha + \beta = 180^\circ$
(۵) یک چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است اگر و تنها اگر قطرهای آن همدیگر را نصف کنند. $OA = OC$ $OB = OD$	(۶) یک چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است اگر و تنها اگر هر قطر، آن را به دو مثلث مساوی تقسیم کند. $\triangle ABD \cong \triangle BCD$

● مستطیل، متوازی‌الاضلاعی که همه زوایای آن قائمه باشد. همه ویژگی‌های متوازی‌الاضلاع را دارد به علاوه موارد زیر:

(۱) مستطیل، متوازی‌الاضلاعی است که دو ضلع مجاور آن بر هم عمود باشند. $AB \perp BC$ $AD \perp CD$	(۲) مستطیل، متوازی‌الاضلاعی است که دو قطر آن با هم برابر باشند. $AC = BD$
---	--

● لوزی: متوازی‌الاضلاعی است که هر چهار ضلع آن با هم برابر باشد. همه ویژگی‌های متوازی‌الاضلاع را دارد به علاوه موارد زیر:

(۱) لوزی، متوازی‌الاضلاعی است که قطرهای آن برهم عمود باشند. $AC \perp BD$	(۲) لوزی، متوازی‌الاضلاعی است که قطرهای آن نیمساز زوایا باشد.
--	--

● مربع: متوازی‌الاضلاعی که همه زوایای آن قائمه و هر چهار ضلع آن با هم برابرند. مربع تمام ویژگی‌های لوزی و مستطیل را دارد.

● دوزنقه: چهارضلعی که فقط دو ضلع موازی داشته باشد.

دوزنقه قائم‌الزاویه دوزنقه‌ای که دو زاویه قائمه داشته باشد.	دوزنقه متساوی‌الساقین دوزنقه‌ای که ساق‌های آن با هم برابر باشد. $AD = BC$ $\hat{A} = \hat{B}, \hat{C} = \hat{D}$ $BD = AC$ بنابراین:
---	---

● کایت: چهارضلعی که اضلاع آن دوتایی دوتایی با هم برابرند.

(۱) قطر بزرگ عمودمنصف قطر کوچک است. $AC \perp BD$	(۲) قطر بزرگ نیمساز زاویه است ولی قطر کوچک نیمساز نیست.
--	--



مرورنامه آزمون آزمایشی خیلی سبز

هندسه

● وصل کردن وسط اضلاع چهارضلعی

(۲) چهارضلعی با قطرهای برابر (مستطیل، دوزنقه متساوی الساقین، مربع)
 شکل حاصل: لوزی
 MNPQ لوزی

(۱) هر چهارضلعی دایخواه
 شکل حاصل: متوازی الاضلاع
 MNPQ متوازی الاضلاع

(۴) چهارضلعی با قطرهای برابر و عمود بر هم (مربع)
 شکل حاصل: مربع
 MNPQ مربع

(۳) چهارضلعی با قطرهای عمود برهم (لوزی، کایت، مربع)
 شکل حاصل: مستطیل
 MNPQ مستطیل

● شکل حاصل از برخورد نیمساز زوایای چهارضلعی

اندازه ضلع	شکل	حالت
$x = a - b \sin \alpha$ $y = a - b \cos \alpha$		(۱) از تقاطع نیمسازهای داخلی هر متوازی الاضلاع همواره یک مستطیل حاصل می شود.
$x = \frac{\sqrt{2}}{2} a - b $ (همون $\frac{\sqrt{2}}{2} \sin 45^\circ$ یا $\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 45^\circ$)		(۲) از تقاطع نیمسازهای داخلی هر مستطیل همواره یک مربع حاصل می شود.

● روابط مثلث قائم الزاویه

شکل	رابطه
	$AC = \frac{\sqrt{3}}{2} BC$
	$AC = \frac{\sqrt{2}}{2} BC$
	$AC = \frac{BC}{2}$
	$AH = \frac{BC}{4}$

درس ۲: مساحت و کاربردهای آن

— محاسبه مساحت مثلث —

	$S = \frac{1}{2} a \cdot h_a$, $a = \frac{2S}{h_a}$, $h_a = \frac{2S}{a}$ $\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{P}{S}$	مساحت مثلث (رابطه ضلع و ارتفاع) ($P =$ نصف محیط)
	$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A'B'C'}} = \frac{AH}{A'H'}$	مثلث های هم قاعده
	$\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ACD}} = \frac{m}{n}$	مثلث های هم ارتفاع
	$S = \frac{1}{2} bc = \frac{1}{2} a \cdot h_a$	مثلث قائم الزاویه



میانها و مساحت

	$\frac{GM}{GA} = \frac{GN}{GB} = \frac{GP}{GC} = \frac{1}{3}$	(۱) میانهای اضلاع مثلث هم‌رس‌اند و به نسبت ۲ به ۱ همدیگر را قطع می‌کنند.
	$S_{\triangle ABM} = S_{\triangle ACM}$	(۲) میانه، مثلث را به دو مثلث معادل تقسیم می‌کند.
	$S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = S_5 = S_6$	(۳) اگر میانهای مثلث را رسم کنیم، شش مثلث معادل ایجاد می‌شود.
	$S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = \frac{S_{\triangle ABC}}{4}$	(۴) اگر وسط اضلاع مثلث را به هم وصل کنیم، ۴ مثلث معادل ایجاد می‌شود.

مثلث متساوی‌الساقین

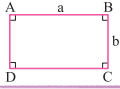
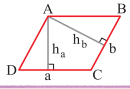
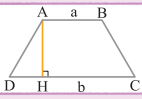
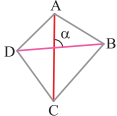
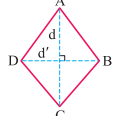
	$h_1 + h_2 = BH$	(۱) اگر P نقطه‌ای دلخواه روی قاعده مثلث متساوی‌الساقین باشد:
	$ h_1 - h_2 = CH$	(۲) اگر P نقطه‌ای دلخواه روی امتداد قاعده مثلث متساوی‌الساقین باشد:

مثلث متساوی‌الاضلاع

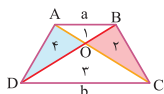
	$AH = \frac{\sqrt{3}}{2} a$	(۱) اندازه ارتفاع، میانه و نیمساز همواره $\frac{\sqrt{3}}{2}$ برابر ضلع است.
	$S = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$	(۲) مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع $\frac{\sqrt{3}}{4}$ برابر مربع ضلع است.
	$x + y + z = h_a = \frac{\sqrt{3}}{2} a$	(۳) اگر O نقطه‌ای دلخواه درون مثلث متساوی‌الاضلاع باشد:
	$x - y + z = h_a = \frac{\sqrt{3}}{2} a$	(۴) اگر P نقطه‌ای دلخواه خارج مثلث متساوی‌الاضلاع باشد:



مساحت چهارضلعی‌های خاص -

مساحت مستطیل	مساحت متوازی‌الاضلاع
 $S = a \cdot b$	 $S = a \times h_a = b \times h_b$
مساحت مربع	مساحت دوزنقه
 $S = a^2$	 $S = \frac{1}{2} \times AH \times (a + b)$
مساحت چهارضلعی (حالت کلی)	مساحت چهارضلعی با قطرهای عمود بر هم (کایت، لوزی)
 $S = \frac{1}{2} AC \times BD \times \sin \alpha$	 $S = \frac{1}{2} d \cdot d'$

قضیه شبه‌پروانه در دوزنقه -



$$(1) S_T = S_F$$

$$(2) S_1, S_r = S_T, S_F = S_T' = S_F'$$

رابطه پیک -

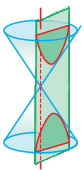
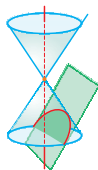
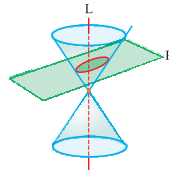
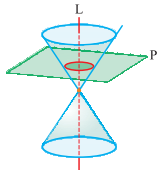
$$S = \frac{b}{r} + i - 1$$

اگر b تعداد نقاط مرزی و i تعداد نقاط درونی یک چندضلعی شبکه‌ای باشد، داریم:

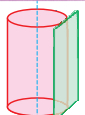
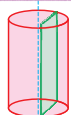
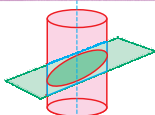
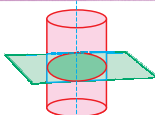
پایه دوازدهم

فصل دوم، درس ۱: آشنایی با مقاطع مخروطی و مکان هندسی

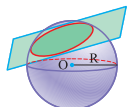
مقاطع مخروطی -

هذلولی	سه‌می	بیضی	دایره
صفحه P موازی محور سطح مخروطی بوده و هر دو نیمه آن را قطع می‌کند.	صفحه P با مولد موازی است.	صفحه P بر محور سطح مخروطی عمود نبوده و با مولد موازی نیست.	صفحه P بر محور سطح مخروطی عمود است.
			

مقاطع استوانه‌ای -

یک خط	دو خط موازی	بیضی	دایره
صفحه P موازی محور استوانه و به فاصله شعاع از آن	صفحه P موازی محور استوانه و به فاصله کمتر از شعاع آن	صفحه P به صورت مورب	صفحه P عمود بر محور استوانه
			

سطح مقطع حاصل از برخورد هر صفحه با کره‌ای به مرکز O و شعاع R همواره یک دایره است.





- مکان هندسی های معروف -

	مکان هندسی نقاطی از صفحه که از یک نقطه ثابت مانند O به فاصله R باشند، دایره‌ای است به مرکز O و شعاع R
	مکان هندسی نقاطی از صفحه که از خط d به فاصله a باشند، دو خط به موازات d و به فاصله a از آن هستند.
	مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو سر یک پاره‌خط به یک فاصله باشند، عمودمنصف آن پاره‌خط است.
	مکان هندسی نقاطی از صفحه که از اضلاع یک زاویه به یک فاصله باشند، نیمساز آن زاویه است.
	مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو خط متقاطع ℓ_1 و ℓ_2 به یک فاصله باشند، نیمسازهای زوایای به‌وجود آمده توسط آن دو خط متقاطع است.

آمار و احتمال

- قضیه تقسیم -

$$\frac{a}{r} \mid \frac{b}{q}$$

$$q = \left\lceil \frac{a}{b} \right\rceil : \text{خارج قسمت}$$

$$b : \text{مقسوم علیه (طبیعی)}$$

$$a : \text{مقسوم (صحیح)}$$

$$a = bq + r \text{ و } 0 \leq r < b : \text{قضیه تقسیم}$$

$$r : \text{باقی مانده}$$

ویژگی‌ها:

$$1) \text{ اگر } a < b \text{ و } q = 0 \text{ باشد، } r = a \text{ است.}$$

$$2) \text{ اگر } a > b \text{ باشد، همواره } a > 2r \text{ است.}$$

$$3) \text{ اگر باقی مانده تقسیم } b \text{ بر } r \text{ برابر } -a \text{ باشد، باقی مانده } -a \text{ بر } b \text{ می شود: } b - r$$

$$4) \text{ هر عدد صحیح } a \text{ در تقسیم بر } b \text{ یکی از باقی مانده های صفر تا } b-1 \text{ را دارد و این رابطه } \mathbb{Z} \text{ را افزایش می کند.}$$

تقسیم بر ۲	تقسیم بر ۳	تقسیم بر ۴
$b = 2$ $\mathbb{Z} = [0]_2 \cup [1]_2$	$b = 3$ $\mathbb{Z} = [0]_3 \cup [1]_3 \cup [2]_3$	$b = 4$ $\mathbb{Z} = [0]_4 \cup [1]_4 \cup [2]_4 \cup [3]_4$
مربع هر عدد زوج، مضرب ۴ است. مربع هر عدد فرد، به صورت $4k+1$ است.	مربع هر عدد مضرب ۳، مضرب ۹ است. مربع اعدادی که مضرب ۳ نباشند، به صورت $3q+1$ است.	مربع اعداد زوج $4k$ و مربع اعداد فرد $4k'+1$ (و البته $4q+1$) است.
نتیجه: ضرب دو عدد متوالی همواره زوج است.	نتیجه: ضرب سه عدد متوالی همواره مضرب $3! = 6$ است.	نتیجه: ضرب ۴ عدد متوالی همیشه مضرب $4! = 24$ است.

نکته

از تقسیم بر ۵ نتیجه می شود:

باقی مانده تقسیم a بر ۵	۰	۱	۲	۳	۴
باقی مانده تقسیم a ^۲ بر ۵	۰	۱	۴	۴	۱

پس هیچ مربع کاملی در تقسیم بر ۵، باقی مانده ۲ یا ۳ ندارد و این یعنی رقم یکان عدد مربع کامل هرگز ۲، ۳، ۷ و ۸ نیست.



مرورنامه آزمون آزمایشی خیل سبز

آمار و احتمال

استدلال ریاضی

- مثال نقض -

روش استفاده: با یک مثال نشان دهیم حکم کلی نادرست است.

مثال نقض	حکم نادرست
$n = 5$ (عدد $1 + 2^3$ به 64 می خورد).	$2^n + 1$ اول است.
اعداد k (مثل $4, 8, \dots$)	هر عدد طبیعی $n > 2$ جمع اعداد متوالی است.
$Z \cup W = Z \cup N \Rightarrow W = N$	$A \cup B = A \cup C \Rightarrow B = C$
$x = \frac{1}{2}$	$\forall x \in \mathbb{R}; x^2 \geq x$
مثلث با یک زاویه باز	ارتفاع مثلث درون آن است.
$\sqrt{2} + \underbrace{(1 - \sqrt{2})}_{\text{گنگ}} = 1$	جمع دو عدد گنگ، گنگ است.
$0 \times \sqrt{3} = 0$	ضرب عدد گویا در گنگ، گنگ است.
$n = 3 \Rightarrow 4^2 + 1 = 65$	عدد $4^n + 1$ اول است.
$12 6 \Rightarrow 12 6^2$	اگر مربع عددی به 12 بخش پذیر باشد، خود عدد هم به 12 بخش پذیر است.
$10 4 \times 5 \Rightarrow 10 5$ یا $10 4$	اگر $a bc$ ، آنگاه $a b$ یا $a c$.

- اثبات مستقیم -

روش کار: با مدل سازی ریاضی، از فرض شروع می کنیم و با طی مراحل ریاضی به حکم می رسیم.

بیان صورت حکم	عدد طبیعی	عدد زوج	عدد فرد	دو عدد متوالی	دو عدد فرد متوالی	دو عدد زوج متوالی
بیان ریاضی	n	$2k$	$2k+1$	$n, n+1$	$2k-1$ و $2k+1$	$2k$ و $2k+2$

حکم های مهم که با استنتاج (اثبات مستقیم) ثابت می شوند:

- مربع هر عدد فرد از مضرب 8 یک واحد بیشتر است.
- جمع سه عدد متوالی مضرب 3 است.
- جمع دو عدد فرد متوالی مضرب 4 است.
- اگر k ضرب دو عدد طبیعی متوالی باشد $4k+1$ مربع کامل است.

- بررسی تمام حالات -

روش کار: در مسائلی که حالت های محدودی داریم، مثلاً زوج یا فرد یا مثلاً باقی مانده بر 3 که می تواند 0 یا 1 یا 2 باشد، تمامی حالت ها را بررسی می کنیم.

حکم های مهمی که با این روش اثبات می شوند:

- اگر $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$ زوج باشد، آنگاه باقی مانده تقسیم n بر 4 ، یا صفر یا 3 است.
- مربع هر عدد یا مضرب 9 است یا به صورت $2q+1$ (هیچ مربع کاملی $2q+2$ نیست).
- هر عدد اول $p > 5$ به صورت $6k \pm 1$ است.
- اگر ab فرد باشد، $a+b$ زوج است.

- قضیه های کمکی در باقی مانده تقسیم عبارات بزرگ -

نام	فرما	نیوتن	ویلسن
فرمول	$a^{p-1} \equiv 1$	$a^{r^k+r} \equiv a^r$ $r = 1, 2, 3, 4$	$(p-1)! \equiv -1$
پیمانه	عدد اول	10	عدد اول

- مسئله تقویم -

از یک روز هفته (مثلاً دوشنبه) اگر $7k$ روز جلوتر یا عقب تر برویم، باز هم دوشنبه است. پس در تعیین روز، فقط باقی مانده بر 7 مهم است؛ یعنی اگر $m \equiv n$ ، آنگاه m روز بعد و n روز بعد در هفته یک روز هستند.

مثلاً از 3 فروردین تا 2 آبان به تعداد $2+30+31+28$ روز گذشته که باقی مانده اش بر 7 می شود: پس انگار 5 روز گذشته و اگر بدانیم 3 فروردین «شنبه» است، 2 آبان می شود «پنجشنبه».



ریاضیات گسسته

تعریف همنهستی -

a و b وقتی همنهستند که در تقسیم بر یک عدد هم باقی مانده باشند.	a و b وقتی همنهستند که تفاضلشان به m بخورد.
$\left. \begin{array}{l} a = mq + r \\ b = mq' + r \end{array} \right\} \Rightarrow a \equiv b^m$	$a - b = mq \Leftrightarrow m \mid a - b \Leftrightarrow a \equiv b^m$

خواص همنهستی -

شماره	توصیف	بیان ریاضی	مثال
۱	هر عدد با خودش همنهست است.	$a \equiv a^m$	$x^7 - 2x = 3 \Rightarrow x^7 - 2x \equiv 3^m$
۲	همنهستی تعدی دارد.	$\left. \begin{array}{l} a \equiv b^m \\ b \equiv c^m \end{array} \right\} \Rightarrow a \equiv c^m$	$\left. \begin{array}{l} 65x \equiv 1x \\ x \equiv 3 \end{array} \right\} \Rightarrow 65x \equiv 3^m$
۳	تبدیل تقسیم به همنهستی و برعکس	$a = mq + r \Leftrightarrow a \equiv r^m$	$\begin{array}{l} a = 6q + 1 \Rightarrow a \equiv 1^6 \\ b \equiv 3^6 \Rightarrow b = 6q' + 3 \end{array}$
۴	تبدیل پیمانه به مقسوم علیه	$\left. \begin{array}{l} a \equiv b^m \\ d \mid m \end{array} \right\} \Rightarrow a \equiv b^d$	$x \equiv y \Rightarrow x \equiv y^{10}, x \equiv y^5, x \equiv y^4, \dots$
۵	به جای هر عدد می توان باقی مانده آن را بر m قرار داد.	$\begin{array}{c} a + b \times c \equiv \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ r_1 + r_2 \times r_3 \end{array}$	$12x - 8y + 20 \equiv 2x - 3y + 0^5$
۶	مضارب پیمانه، همنهست با صفرند و می توان آن ها را به دو طرف همنهستی اضافه و کم کرد.	$a \equiv b^m \Rightarrow a \pm mq \equiv b \pm mq'^m$	$\begin{array}{l} x \equiv 3^{17} \Rightarrow x \equiv 3^{17} \\ y \equiv -2^6 \Rightarrow y \equiv 6^6 \end{array}$
۷	اگر دو عدد در چند پیمانه همنهست باشند، به ک.م.م آن ها نیز همنهست اند.	$\begin{array}{l} a \equiv b^m \\ a \equiv b^n \end{array} \Rightarrow a \equiv b^{[m,n]}$	$\begin{array}{l} x \equiv 1^6 \Rightarrow x \equiv 1^{12} \\ x \equiv 1^4 \Rightarrow x \equiv 1^4 \end{array}$
۸	اجازه داریم دو طرف را با عددی جمع، تفریق یا ضرب کنیم و به توان برسائیم.	$\begin{array}{l} a \equiv b^m \Rightarrow a \pm c \equiv b \pm c^m \\ ac \equiv bc^m \quad a^n \equiv b^n^m \end{array}$	$\begin{array}{l} 3^7 \equiv 1^5 \xrightarrow{\text{به توان } 5} 3^{35} \equiv 1^{25} \\ \xrightarrow{\times 2} 3^{70} \equiv 2^{25} \xrightarrow{+5} 3^{70} + 5 \equiv 2^{25} \end{array}$
۹	در بسط اتحاد دوجمله ای اگر پیمانه حاصل ضرب دو جمله باشد، فقط جمله اول و آخر می مانند.	$(a+b)^n \equiv a^n + b^n^m$	$10^{21} \equiv 3^{25} + 7^{25}$
۱۰	اگر دو طرف را بر عددی تقسیم کنیم، پیمانه بر به هم خودش و آن عدد تقسیم می شود.	$\begin{array}{l} a \equiv b^m \\ ac \equiv bc \end{array} \Rightarrow a \equiv b^{\frac{m}{(m,c)}}$	$6x \equiv 9y \xrightarrow{\div 3} 2x \equiv 3y^5$

قضیه های کمکی در باقی مانده تقسیم عبارت های بزرگ -

فرما	نیوتن	ویلسن	نام
$a^{p-1} \equiv 1^p$	$a^{rk+r} \equiv a^r^{10}$ $r = 1, 2, 3, 4$	$(p-1)! \equiv -1^p$	فرمول
عدد اول	۱۰	عدد اول	پیمانه



مسئله تقویم -

از یک روز هفته (مثلاً دوشنبه) اگر $7k$ روز جلوتر یا عقب‌تر برویم، باز هم دوشنبه است. پس در تعیین روز، فقط باقی‌مانده 7 مهم است؛ یعنی اگر $n \equiv m \pmod{7}$ ، آن‌گاه m روز بعد و n روز بعد در هفته یک روز هستند.
مثلاً از 3 فروردین تا 2 آبان به تعداد $28 + 5 \times 31 + 30 + 2$ روز گذشته که باقی‌مانده‌اش بر 7 می‌شود:
پس انگار 5 روز گذشته و اگر بدانیم 3 فروردین «شنبه» است، 2 آبان می‌شود «پنج‌شنبه».

معادله سیال خطی -

فرم معادله	شرط وجود جواب	روش حل عادی	روش حل با همنهشتی
$ax + by = c$	$(a, b) \mid c$	اول معادله را بر (a, b) تقسیم می‌کنیم. سپس یک جواب را با جست‌وجو پیدا می‌کنیم: x_0, y_0 و جواب کلی $x = x_0 + k \frac{b}{(a, b)}$ و $y = y_0 - k \frac{a}{(a, b)}$ است.	اگر یک مجهول مهم نباشد یا یافتن یک جواب سخت باشد، معادله $ax + by = c$ را به صورت $ax \equiv c \pmod{b}$ یا $by \equiv c \pmod{a}$ درمی‌آوریم و با تقسیم برضرب مجهول، مسئله حل می‌شود.

نکته

اگر x و y تعداد ظرف، تمبر، سکه و ... باشند، باید $x \geq 0$ و $y \geq 0$ قرار دهیم و تعداد مقادیر صحیح k را بشماریم.

مثال

$$12x + 20y = 100$$

$$12x + 20y = 100 \xrightarrow{\div 4} 3x + 5y = 25 \quad \text{جواب دارد}$$

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 + 5k \\ y = 5 - 3k \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

پاسخ

مثال

$$17x + 13y = 100$$

$$(17, 13) \mid 100$$

$$17x \equiv 100 \pmod{13} \Rightarrow 4x \equiv 9 \pmod{13} \xrightarrow{\div 4} x \equiv -1 \pmod{13} \Rightarrow x = 13q - 1$$

$$\xrightarrow{\text{جای‌گذاری در معادله}} y = -17q + 9$$

پاسخ

یک جواب سخت است:

معادله همنهشتی -

معادله $ax \equiv b \pmod{m}$ یک معادله همنهشتی نام دارد.

شرط وجود جواب برای x این است که $(a, m) \mid b$.

برای حل باید بعد از نوشتن همنهشت‌های a و b دو طرف را بر ضریب x تقسیم کرد.

$$7x \equiv 2 \pmod{11} \Rightarrow 7x \equiv 2 \pmod{11} \xrightarrow{\div 7} x \equiv 5 \pmod{11}$$

$$(7, 11) = 1 \mid 2$$

کلاس‌ها (دسته‌های) هم‌ارزی در رابطه همنهشتی -

همان‌طور که در تقسیم دیدید، با در نظر گرفتن باقی‌مانده‌های مختلف در تقسیم بر عدد طبیعی b مجموعه $\mathbb{Z}$ به b کلاس افراز می‌شود. در همنهشتی نیز می‌توان گفت تمام اعداد صحیح در پیمانه m با یکی از اعداد $0, 1, 2, \dots, m-1$ همنهشت هستند.

$$[r]_m = \{x \mid x \equiv r \pmod{m}\} \quad \text{کلاس (دسته همنهشتی } r \text{ در پیمانه } m)$$

مثلاً $[2]_5$ یعنی مجموعه اعداد $2 + 5q$ که در تقسیم بر 5 باقی‌مانده 2 دارند.

دو ویژگی مهم درباره کلاس‌های همنهشتی -

۱) در همنهشتی به پیمانه m ، m کلاس داریم.

مثلاً در پیمانه 6 ، 6 کلاس داریم و اگر $\mathbb{Z}$ به 9 کلاس افراز شده، پیمانه 9 بوده است.

۲) دو عدد وقتی در یک کلاس قرار دارند که همنهشت باشند:

$$[x]_m = [y]_m \Rightarrow x \equiv y \pmod{m}$$

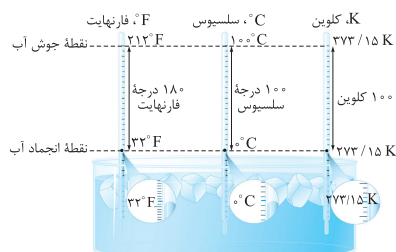
پایه دهم

دما و دماسنجی

دما: کمیتی اصلی، نشان دهنده میزان سردی و گرمی اجسام، متناسب با انرژی جنبشی ذرات سازنده.

کمیت دماسنجی: مشخصه‌ای که با دما «تغییر» می‌کند و قابلیت «اندازه‌گیری» دارد و از تغییر آن به تغییر دما پی می‌بریم.

مقیاس‌های دما



سلسیوس « θ »: نماد یکاها « $^{\circ}\text{C}$ »

کلون « T »: یکای دما در SI و با نماد « K » $T = \theta + 273$

فahrenheit « F »: نماد یکاها « $^{\circ}\text{F}$ » $F = \frac{9}{5}\theta + 32$

نکته

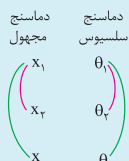
رابطه تغییرات دما در مقیاس‌های دما:

$$\Delta F = \frac{9}{5}\Delta\theta, \Delta\theta = \Delta T$$

نکته

اگر دماسنج دماهای θ_1 و θ_2 را به ترتیب x_1 و x_2 دمای θ را x نشان دهد، خواهیم داشت:

$$\frac{\theta - \theta_1}{x - x_1} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{x_2 - x_1}$$



نکته

دماسنج	کمیت دماسنجی
جیوه‌ای و الکلی	ارتفاع مایع درون لوله
ترموکوپل	ولتاژ
مقاومت پلاتینی	مقاومت الکتریکی
گازی	حجم یا فشار گاز

دماسنج‌های معیار

نام دماسنج	اساس کار
گازی	قانون گازهای کامل «تغییرات حجم یا فشار گاز»
مقاومت پلاتینی	تغییرات مقاومت الکتریکی فلز پلاتینی
تفسنج	اندازه‌گیری مشخصه‌های تابش گرمایی

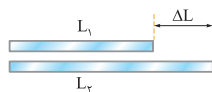
ترموکوپل

دماسنجی که براساس تغییر ولتاژ، تغییر دما را اندازه می‌گیرد. در ساختمان آن از دو سیم فلزی غیر هم‌جنس استفاده شده است. جزء دماسنج‌های معیار محسوب نمی‌شود. دمای جسم را سریع اندازه‌گیری می‌کند و در صنعت و وسایل گرمایی و سرمایشی کاربرد دارد.



انقباض گرمایی

- انقباض طولی -



ضریب انقباض طولی که به میله بستگی دارد، $(K)^{-1}$ تغییرات دمایی برحسب کلوین یا سلسیوس $\rightarrow \Delta L = L_1 \alpha \Delta \theta$: تغییر طول میله طول اولیه

توجه یکای L_1 ، L_2 و ΔL کافی است یکسان باشند.

توجه ضریب انقباض طولی اندکی به دما وابسته است که چشم‌پوشی می‌کنیم.

نمودار انقباض طولی

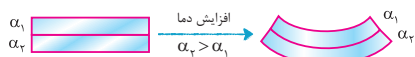


نکته

$$\text{درصد تغییر طول} = \frac{\Delta L}{L_1} \times 100 = \alpha \Delta \theta \times 100$$

دو موضوع در کتاب درسی

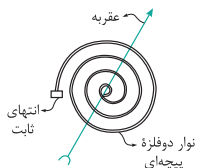
۱) دما یا (ترموستات):



فلزی که انقباض طولی بیشتری دارد، با تغییر دما، تغییرات طولی بیشتری پیدا می‌کند. با خم شدن نوارها اتصال مداری که دما یا در آن است قطع یا وصل می‌شود و دما کنترل می‌شود.

۲) نوار منبع دوقلزه (بی‌مثال):

یک سر این نوار دوقلزه ثابت است و انتهای دیگر آن به عقربه‌ای متصل است. در اثر تغییر دما، انحنای نوار تغییر کرده و عقربه می‌چرخد.



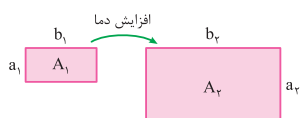
انقباض سطحی

$$\Delta A = A_1 (\gamma \alpha) \Delta T$$

ضریب انقباض طولی

$$\text{مساحت ثانویه سطح} : A_2 = A_1 (1 + (\gamma \alpha) \Delta T)$$

$$\text{درصد تغییر مساحت} : \frac{\Delta A}{A_1} \times 100 = (\gamma \alpha) \Delta T \times 100$$



توجه یکای A_1 ، A_2 و ΔA کافی است یکسان باشند.

انقباض حجمی

$$\Delta V = V_1 \beta \Delta T$$

ضریب انقباض حجمی $(\beta = \gamma \alpha)$

$$\text{حجم ثانویه ماده} : V_2 = V_1 (1 + \beta \Delta \theta)$$

$$\text{درصد تغییر حجم ماده} : \frac{\Delta V}{V_1} \times 100 = \beta \Delta \theta \times 100$$

توجه مایعات فقط ضریب انقباض حجمی (β) دارند.

توجه یکای V_1 ، V_2 و ΔV کافی است یکسان باشند.

نکته

$$\Delta V_{\text{ظرف}} - \Delta V_{\text{مایع}} = \Delta V_{\text{ظاهری}}$$

انقباض ظاهری:

مرورنامه آزمون آزمایشی خیلی سبز



رابطه تغییر چگالی با تغییر دما

$$\Delta \rho = -\rho_1 \beta \Delta \theta$$

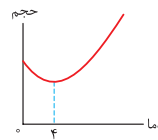
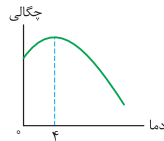
$$\text{درصد تغییر چگالی: } \frac{\Delta \rho}{\rho_1} \times 100 \approx -\beta \Delta \theta \times 100$$

نکته

اگر در اثر افزایش دمای معین، طول جسمی X درصد افزایش یابد، مساحت آن $2X$ درصد، حجم آن $3X$ درصد افزایش و چگالی آن $3X$ درصد کاهش می‌یابد.

انبساط غیرعادی آب

دما	$^{\circ}\text{C} \leq \theta < 4^{\circ}\text{C}$	$\theta = 4^{\circ}\text{C}$	$\theta > 4^{\circ}\text{C}$
حجم	با افزایش دما، کاهش می‌یابد.	کم‌ترین مقدار	با افزایش دما، افزایش می‌یابد.
چگالی	با افزایش دما، افزایش می‌یابد.	بیشترین مقدار	با افزایش دما، کاهش می‌یابد.



گرما (Q)

نوعی انرژی که از جسم با دمای بالاتر به جسم با دمای پایین‌تر منتقل می‌شود. (یکا: ژول (J))

تغییر دما در اثر مبادله گرما

$$Q = C \times \Delta \theta$$

تغییرات دما (K یا $^{\circ}\text{C}$) گرما (J)
ظرفیت گرمایی (J/K)

$$Q = m \times c \times \Delta \theta$$

جرم جسم (kg)
ظرفیت گرمایی ویژه ($J/kg \cdot K$)

ظرفیت گرمایی (C)	جرمای ویژه (c)
مقدار گرمایی که جسم می‌گیرد تا دمای آن $1 K$ افزایش یابد.	مقدار گرمایی که به یک کیلوگرم از جسم داده می‌شود تا بدون تغییر حالت دمای آن $1 K$ افزایش یابد.
به جنس و جرم بستگی دارد.	فقط به جنس بستگی دارد.
J/K	$\frac{J}{kg \cdot K}$ یا $\frac{J}{kg \cdot ^{\circ}\text{C}}$

نکته

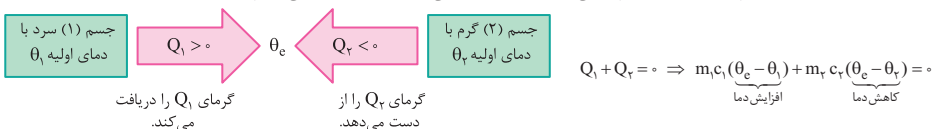
توان گرمایی:

$$Q = P \times t \times Ra$$

زمان (s)
بازده توان (W)

تعادل گرمایی

دو جسم با دمای متفاوت، اگر در تماس با هم باشند، در نهایت هم‌دما می‌شوند. به این دمای نهایی یکسان، دمای تعادل می‌گوییم.



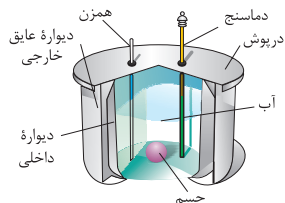


مرورنامه آزمون آزمایشی خیلی سبز

فیزیک

گرماسنج

وسیله‌ای عایق‌بندی‌شده به شکل زیر که در آزمایش‌های تعادل گرمایی و گرماسنجی استفاده می‌شود.



$$Q_{\text{آب}} + Q_{\text{جسم}} + Q_{\text{گرماسنج}} = m_{\text{آب}} c_{\text{آب}} (\theta_e - \theta_1) + m_{\text{جسم}} c_{\text{جسم}} (\theta_e - \theta_2) + C(\theta_e - \theta_3) = 0$$

↑ دمای اولیه جسم ↑ دمای اولیه آب ↑ دمای اولیه گرماسنج

↓ ظرفیت گرمایی گرماسنج

تغییر حالت‌های ماده

نام تغییر حالت	تبدیل فاز	گرم‌گیر یا گرماده
ذوب	جامد به مایع	گرم‌گیر
انجماد	مایع به جامد	گرماده
تبخیر	مایع به بخار	گرم‌گیر
میعان	بخار به مایع	گرماده
تصعید	جامد به گاز	گرم‌گیر
چگالش	گاز به جامد	گرماده

نکته

الف) تمام جامدات جز یخ: افزایش دمای ذوب و انجماد
ب) یخ: کاهش دمای ذوب
پ) آب: کاهش دمای انجماد

نکته

در اکثر موارد پس از ذوب، حجم ماده افزایش می‌یابد.

تفاوت تغییر سطحی و جوشیدن

نوع تغییر	ویژگی
تغییر سطحی	(۱) در هر دمایی به جز نقطه جوش رخ می‌دهد. (۲) فقط مولکول‌های سطحی مایع در آن مشارکت دارند.
جوشیدن	(۱) فقط در نقطه جوش رخ می‌دهد. (۲) تمامی مولکول‌های مایع در آن مشارکت دارند. (۳) حباب‌هایی از کف ظرف به بالا می‌آیند.

توجه هنگام تبخیر سطحی دمای جسم کاهش می‌یابد.

عوامل مؤثر بر آهنگ تغییر سطحی

عوامل مؤثر	نحوه تغییر آهنگ تبخیر سطحی
(۱) افزایش مساحت سطح مایع (۲) افزایش دمای محیط	افزایش
(۱) افزایش فشار وارد بر سطح مایع (۲) افزایش میزان بخار مایع در محیط	کاهش

محاسبه گرمای لازم برای تغییر حالت

$Q = -mL_V$	$Q = mL_V$	$Q = -mL_F$	$Q = mL_F$	رابطه
مایع به گاز	گاز به مایع	مایع به جامد	جامد به مایع	نوع تغییر حالت ماده

در روابط جدول بالا، m جرم جسم بر حسب کیلوگرم است.

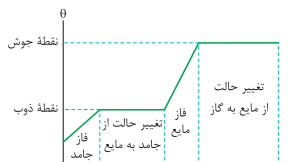


نکته

- گرمای نهان ذوب نام دارد.
- L_F (الف) J/kg یکا: J/kg
- به جنس جسم بستگی دارد.
- گرمای نهان تبخیر نام دارد.
- L_V (ب) J/kg یکا: J/kg
- به جنس و دمای مایع بستگی دارد (با افزایش دمای مایع L_F کم می‌شود).

نمودار تغییرات دما برحسب زمان

هنگام تغییر حالت، دمای جسم ثابت می‌ماند.



انتقال گرما

روش‌های انتقال گرما	رسانش گرمایی	(۱) در هر سه حالت ماده رخ می‌دهد. اما در گازها بسیار ناچیز است. (۲) شیوه انتقال: افزایش ارتعاشات اتم‌های گرماگرفته و گسترش ارتعاشات به اتم‌های مجاور (۳) در رساناها سهم الکترون‌های آزاد در رسانش گرمایی، بیشتر از خود اتم‌هاست.
	همرفت	(۱) فقط در شاره رخ می‌دهد. (۲) شیوه انتقال: جابه‌جایی قسمتی از شاره که گرما گرفته، به قسمت‌های سردتر. (۳) دو نوع طبیعی و واداشته دارد: (الف) همرفت طبیعی: جابه‌جایی مایع به دلیل اختلاف چگالی است. (مثل انتقال گرما از مرکز خورشید به سطح آن) (ب) جابه‌جایی مایع به وسیله تلمبه رخ می‌دهد. (مثل گردش خون و سیستم خنک‌کننده خودرو) (۴) در اثر جریان همرفت، در روز نسیم از دریا به ساحل و در شب، نسیم از ساحل به دریا است.
	تابش گرمایی	(۱) در هر سه حالت ماده رخ می‌دهد. (۲) شیوه انتقال: گسیل امواج الکترومغناطیسی (هر جسمی در هر دمایی از خود موج الکترومغناطیسی گسیل می‌کند). (۳) تابش گرمایی در دماهای زیر $500^\circ C$ ، به صورت فروسرخ است. (۴) اجسام صاف و صیقلی و روشن تابش‌کننده‌های خوبی نیستند. (۵) اجسام ناصاف و مات و تیره تابش‌کننده‌های خوبی هستند. (۶) نمونه: کلم اسکانک و شکار توسط مار زنگی با تابش فروسرخ

نکته

دو نوع تفسنج داریم $\rightarrow$ تفسنج تابشی $\rightarrow$ تفسنج نوری (دماسنج معیار)

قوانین گازها

بین فشار، دما و حجم یک گاز آرمانی (کامل) رابطه زیر برقرار است:

$$PV = nRT \quad (K: \text{دما (کلوین)}) \quad (Pa: \text{فشار (پاسکال)})$$

ثابت عمومی گازها یا یکای $\frac{J}{mol \cdot K}$ و مقدار $8/314$

توجه در رابطه بالا، P فشار کل (فشار مطلق) است، نه فشار پیمانه‌ای.

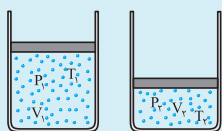
برای محاسبه تعداد مول یک گاز از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$n = \frac{N}{N_A} \rightarrow \text{تعداد ذره‌ها} \quad n = \frac{m}{M} \rightarrow \text{جرم مولی (گرم بر مول: } g/mol \text{)} \quad \text{جرم مولی (گرم بر مول: } g/mol \text{)}$$

توجه اگر با مخلوطی از چند گاز سروکار داشتیم، n برابر مجموع تعداد مول گازهاست.



نکته



$$\frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2}$$

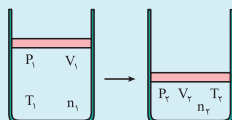
رابطه بین کمیت‌های مقدار معینی از یک گاز آرمانی:

نکته

بررسی فرایندهای گاز در ۳ حالت مختلف			
دما ثابت	حجم ثابت	فشار ثابت	رابطه
$P_1 V_1 = P_2 V_2$	$\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2}$	$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$	
			شیب نمودار $\propto \frac{1}{V}$

نکته

قانون آووگادور:



$$V \propto n \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{n_2}{n_1}$$

نکته

$$\frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2} + \dots$$

اگر ۲ یا چند گاز را با هم مخلوط کنیم.

نکته

$$\frac{P_1 V_1}{n_1 T_1} = \frac{P_2 V_2}{n_2 T_2}$$

اگر در فرایندی هر چهار کمیت دما، فشار، گاز و مقدار ماده تغییر کند:

پایه دوازدهم

دینامیک

قوانین حرکت نیوتون -

نماد $\vec{F}$ (کمیتی برداری)

یکا $\frac{\text{kg.m}}{\text{s}^2}$ (که نیوتون نام‌گذاری شده N)

نیرو، اثر دو جسم از راه دور یا نزدیک بر یکدیگر

آثار نیرو

(الف) تغییر سرعت جسم (اندازه سرعت، جهت سرعت و یا هر دو)

(ب) تغییر شکل جسم

قانون اول نیوتون -

یک جسم، حالت سکون یا حرکت با سرعت ثابت خود را حفظ می‌کند، مگر آن‌که نیروی خالص غیر صفری به آن وارد شود.



نیروی وزن = نیروی شناوری
نیروی پیشران = نیروی مقاومت

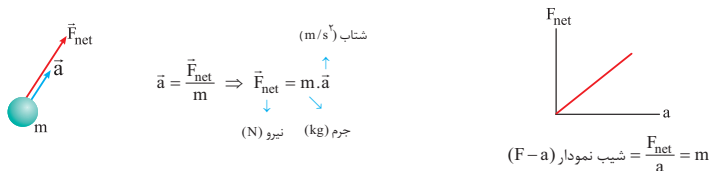
اگر کشتی ساکن یا در حال حرکت با سرعت ثابت باشد

لختی

تأمیل اجسام به حفظ حالت اولیه خود را لختی می‌گویند و با جرم رابطه مستقیم دارد.

– قانون دوم نیوتون –

هرگاه به جسم، نیروی خالصی وارد شود، جسم تحت تأثیر آن نیرو شتاب می‌گیرد که این شتاب با نیروی خالص وارد به جسم نسبت مستقیم دارد و در جهت نیروی خالص است و با جرم جسم نسبت وارون دارد.



نکته

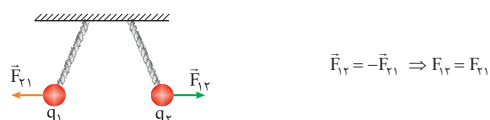
بردارهای یک:

$$\vec{F} = \pm \Delta \vec{i} \pm \square \vec{j} \Rightarrow |\vec{F}| = \sqrt{\Delta^2 + \square^2} \quad \text{و} \quad \vec{a} = \pm \square \vec{i} \pm \square \vec{j} \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{\square^2 + \square^2}$$

بردار شتاب اندازه شتاب

– قانون سوم نیوتون –

هرگاه جسمی به جسم دیگر نیرو وارد کند، جسم دوم نیز به جسم اول نیرویی هم‌اندازه و هم‌راستا اما در خلاف جهت وارد می‌کند. به این دو نیرو، نیروهای کنش و واکنش می‌گوییم.



(ب) هم‌راستا هستند.

(ت) هم‌نوع‌اند. (هر دو الکتریکی یا هر دو مغناطیسی یا ...)

ویژگی‌های نیروی کنش و واکنش:

(الف) هم‌اندازه‌اند.

(پ) در خلاف جهت هم هستند.

(ث) به دو جسم مختلف وارد می‌شوند و قابل برایندگیری نیستند.

– معرفی برخی از نیروهای خاص –

(الف) نیروی وزن ($\vec{W}$)

نیروی گرانشی که از طرف زمین به جسم وارد می‌شود.

$$\vec{W} = m \vec{g}$$

جرم جسم (kg) شتاب گرانش زمین (N/kg) نیروی وزن (N)

نکته

جهت این نیرو همواره به طرف مرکز زمین است.

نکته

وزن یک جسم وابسته به مقدار شتاب گرانش در محل‌های مختلف است.

افزایش ارتفاع $\leftarrow$ کاهش شتاب گرانش

(ب) نیروی مقاومت شاره ($\vec{f}_b$)

نیرویی که به جسم در حال حرکت در شاره (مایع یا گاز)، در خلاف جهت حرکت وارد می‌شود.

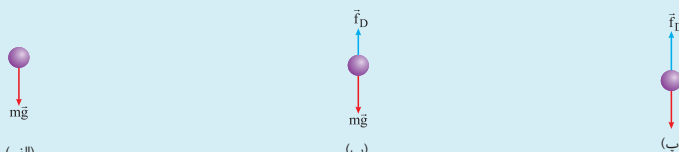
نکته

عوامل مؤثر بر نیروی مقاومت شاره $\leftarrow$ تندى حرکت جسم (رابطه مستقیم با نیرو)
 $\leftarrow$ اندازه جسم (رابطه مستقیم با نیرو)

محاسبه شتاب حرکت جسم با وجود نیروی مقاومت هوا		
جسم در حال سقوط	پرتاب جسم به سمت بالا	شکل نمونه
$a = \frac{mg - f_D}{m} = g - \frac{f_D}{m}$	$ a = \frac{mg + f_D}{m} = g + \frac{f_D}{m}$	اندازه شتاب
به سمت بالا	به سمت پایین	جهت شتاب

نکته

تندی حدی:



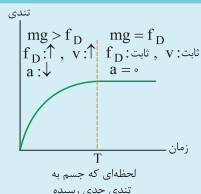
افزایش نیروی مقاومت شاره تا جایی ادامه پیدا می کند که با نیروی وزن برابر شود. پس:

$$mg = f_D$$

شتاب حرکت صفر شده و تندی جسم ثابت می شود، به این تندی حدی می گویند.

نکته

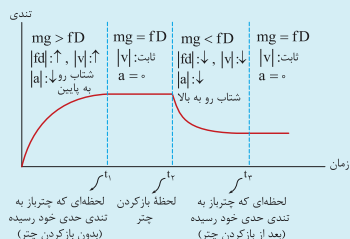
نمودار تندی - زمان برای جسم در حال سقوط:



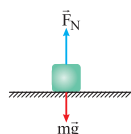
لحظه ای که جسم به تندی حدی رسیده

نکته

نمودار تندی - زمان برای چتربازی که بعد از رسیدن به تندی حدی چتر خود را باز می کند:



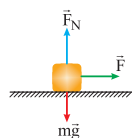
لحظه ای که چتر باز به تندی خود رسیده (بعد از باز کردن چتر)



$$F_N = mg$$

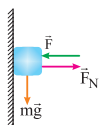
پ) نیروی عمودی سطح ($\vec{F}_N$)

نیرویی که از طرف سطح، به طور عمود به جسم وارد می شود. (الف) جسم روی سطح ساکن است.



$$F_N = mg$$

(ب) جسم روی سطح افقی دارای حرکت است



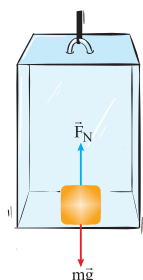
$$F_N = F$$

(پ) جسم روی سطح قائم با نیروی F فشرده شود.

آسانسور

– الف) حرکت آسانسور با سرعت ثابت –

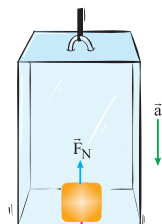
بدون توجه به جهت حرکت:



$$a = 0 \Rightarrow F_N = ma$$

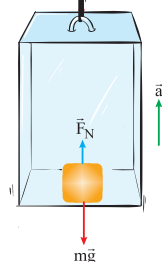
– ب) حرکت آسانسور با شتاب ثابت –

۱) شتاب آسانسور به طرف بالا



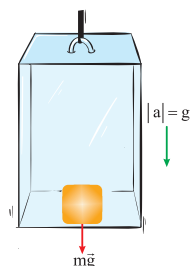
$$F_{net} = ma \Rightarrow F_N - mg = ma \Rightarrow F_N = m(g + a)$$

۲) شتاب آسانسور به طرف پایین



$$F_{net} = ma \Rightarrow mg - F_N = ma \Rightarrow F_N = m(g - a)$$

– پ) سقوط آسانسور –



$$mg - F_N = ma \xrightarrow{a=g} mg - F_N = mg \Rightarrow F_N = 0$$



نکته

جهت حرکت آسانسور	نوع حرکت آسانسور	جهت شتاب آسانسور	رابطه	مقایسه با وزن
به سمت بالا	تندشونده	به سمت بالا	$F_N = m(g + a)$	$F_N > mg$
به سمت بالا	کندشونده	به سمت پایین	$F_N = m(g - a)$	$F_N < mg$
به سمت پایین	تندشونده	به سمت بالا	$F_N = m(g - a)$	$F_N < mg$
به سمت پایین	کندشونده	به سمت پایین	$F_N = m(g + a)$	$F_N > mg$

– (ت) نیروی اصطکاک (f) –

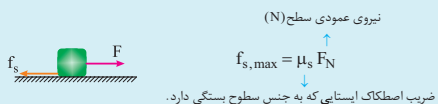
نیرویی که در اثر ناهمواری‌های بین دو سطح ایجاد می‌شود و از حرکت یک جسم روی یک سطح جلوگیری می‌کند.

نکته

حالات مختلف نیروی اصطکاک		
اصطکاک ایستایی (f_s)	اصطکاک جنبشی (f_k)	
جسم ساکن است و با اعمال نیروی خارجی به حرکت در نمی‌آید.	جسم در حال حرکت است.	توضیح
$f_s = F_{\text{محرک}}$	نیروی عمودی سطح (N) $f_k = \mu_k F_N$ ضریب اصطکاک جنبشی که به جنس سطح بستگی دارد.	رابطه

نکته

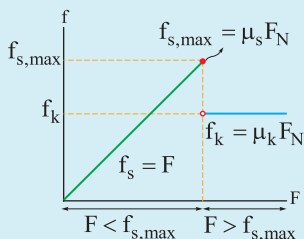
نیروی اصطکاک ایستایی بیشینه: مطابق شکل با افزایش نیروی وارد بر جسم، نیروی اصطکاک ایستایی افزایش یافته و در آستانه حرکت آن، به حد بیشینه خود می‌رسد.



نکته

نمی‌دانیم جسم ساکن است یا متحرک $\leftarrow f_{s,max}$ حساب شود $\leftarrow$ آیا $F > f_{s,max}$ ؟
 اصطکاک از نوع ایستایی $\rightarrow$ خیر
 اصطکاک از نوع جنبشی $\rightarrow$ بله

نکته



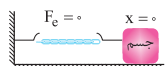
نمودار نیروی اصطکاک برحسب نیروی محرک:



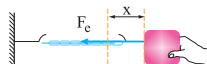
$$R = \sqrt{F_N^2 + F_f^2}$$

– (ث) نیروی واکنش سطح (R) –

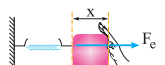
برایند نیروهای اصطکاک و عمودی سطح



(الف)



(ب)



(پ)

تغییرات طول فنر نسبت به حالت تعادل (m)

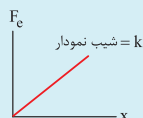
$$F_e = k x$$

ثابت فنر (N/m) که به جنس فنر بستگی دارد.

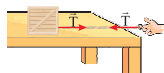
الف) فنر طول عادی دارد و جسم در نقطه تعادل است. ب) فنر کشیده شده است و نیروی کشسانی رو به نقطه تعادل به جسم وارد می‌کند. پ) فنر فشرده شده است و نیروی کشسانی رو به نقطه تعادل به جسم وارد می‌کند.

نکته

نمودار اندازه نیروی کشسانی فنر بر حسب تغییر طول فنر:



– (ج) نیروی کشسانی طناب (T) –



نیرویی که در هر نقطه از طناب برابر است با مقدار دو نیروی خلاف جهت هم که اگر طناب پاره شود، برای کنار هم نگه داشتن دو قسمت پاره شده نیاز است.

نکته

جهت این نیرو همواره از جسم به طرف طناب است. (مطابق شکل)

شیمی

پایه دهم

– خواص و رفتار گازها –

- مولکول‌های یک ماده گازی به راحتی در فضای اطراف منتشر می‌شوند.
- گازها شکل و حجم معینی ندارند. (مایعات شکل معینی ندارند ولی حجم معینی دارند).
- گازها برخلاف جامدات و مایعات تراکم‌پذیرند یعنی با فشرده کردن می‌توانند در حجم کوچک‌تری جای گیرند.

نکته

گاز بر اثر فشار متراکم می‌شود اما اگر فشار کاهش یابد، فاصله بین مولکول‌های آن افزایش می‌یابد.





عوامل مؤثر بر حجم گازها -

برای توصیف یک نمونه گاز، علاوه بر مقدار، باید دما و فشار آن نیز مشخص باشد؛ برای مثال ۱ مول گاز هیدروژن در دما و فشار اتاق، مثالی از یک نمونه گاز است.

(۱) مقدار گاز (۲) دمای گاز (۳) فشار گاز

قوانین گازها -

۱. رابطه میان حجم گاز با فشار در دمای ثابت

(۱) مطابق این قانون، در دمای ثابت برای مقدار معینی گاز، بین حجم و فشار یک نمونه گاز رابطه عکس وجود دارد، به طوری که حاصل ضرب حجم در فشار گاز برابر با عدد ثابتی خواهد بود.

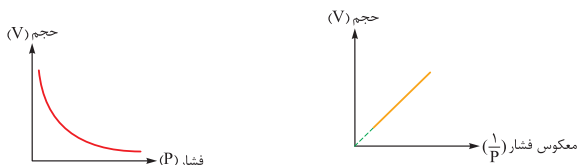
(۲) مطابق این قانون، با افزایش فشار (P)، حجم گاز (V) کاهش و با کاهش فشار (P)، حجم گاز (V) افزایش می‌یابد.

$$V \propto \frac{1}{P}$$

$$P \times V = \text{عدد ثابت} \Rightarrow P_1 \times V_1 = P_2 \times V_2$$

در فرمول بالا یکاهای P_1 و P_2 و یکاهای V_1 و V_2 باید یکسان باشند.

نمودارهای مربوط به رابطه بین حجم گاز با فشار آن:



۲. رابطه میان حجم گاز با دما در فشار ثابت

(۱) در فشار ثابت بین حجم و دمای یک نمونه گاز رابطه مستقیم وجود دارد. به طوری که نسبت حجم به دمای گاز برابر با عدد ثابتی خواهد بود.

(۲) مطابق این قانون، با افزایش دما (T)، حجم گاز (V) افزایش و با کاهش دما (T)، حجم گاز (V) کاهش می‌یابد.

$$V \propto T$$

$$\frac{V}{T} = \text{عدد ثابت} \Rightarrow \frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$$

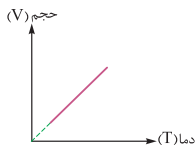
در فرمول بالا یکاهای V_1 و V_2 باید یکسان باشند اما دما (T) حتماً باید برحسب کلوین (K) باشد؛ پس اگر در سؤالی دما برحسب درجه سلسیوس ($^{\circ}\text{C}$) داده شده باشد باید حتماً با رابطه زیر دما را به کلوین تبدیل کرد:

$$T(\text{K}) = \theta(^{\circ}\text{C}) + 273$$

مثال قراردادن بادکنک‌های پر شده از هوا، درون نیتروژن مایع، سبب می‌شود که حجم آن‌ها به شدت کاهش یابد.

نمودار مربوط به رابطه بین حجم گاز و دمای آن:

گفتیم که در فشار ثابت، حجم یک نمونه معینی گاز با دمای آن رابطه مستقیم دارد؛ پس می‌توان گفت نمودار حجم برحسب دمای کلوین برای هر گازی به صورت خط راست با شیب ثابت است.



۳. رابطه بین مول (مقدار) و حجم گاز در دما و فشار ثابت

(۱) در دما و فشار یکسان، حجم یک مول از گازهای گوناگون با هم برابر است.

(۲) در دما و فشار ثابت، حجم هر گازی به تعداد مول‌های آن بستگی دارد و بین تعداد مول‌های گازی (n) و حجم نمونه گاز (V) رابطه مستقیم برقرار است.

(۳) مطابق این قانون، با افزایش تعداد مول‌های گازی (n)، حجم گاز (V) افزایش و با کاهش تعداد مول‌های گازی (n)، حجم گاز (V) کاهش می‌یابد.

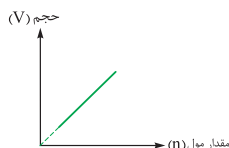
$$V \propto n$$

$$\frac{V}{n} = \text{عدد ثابت} \Rightarrow \frac{V_1}{n_1} = \frac{V_2}{n_2}$$

(۴) در دما و حجم ثابت، هر چه شمار مول‌های یک گاز بیشتر باشد، فشار گاز هم بیشتر خواهد شد.



نمودار مربوط به رابطه حجم و مول گاز:



گفتیم که در دما و فشار ثابت، حجم هر گاز با شمار مول‌های آن رابطه مستقیم دارد.

دیدید که حجم یک نمونه گاز به مقدار، دما و فشار آن وابسته است. بنابراین، با تغییر هر یک از این کمیت‌ها حجم گاز تغییر می‌کند. قانون آووگادرو: در دما و فشار یکسان، حجم یک مول از گازهای گوناگون با هم برابر است. دقت کنید که،

در دما و فشار یکسان در حجم‌های یکسانی از گازهای مختلف، تعداد مولکول‌های برابری وجود دارد ولی الزاماً تعداد اتم‌های تشکیل‌دهنده گازها با هم برابر نیست! زیرا برخی گازها تک‌اتمی (گازهای نجیب)، برخی دواتمی (N_2 ، O_2 و ...) و تعدادی نیز چنداتمی (CH_4 ، CO_2 و ...) هستند.

فرمول قانون آووگادرو:

$$\frac{A}{B} = \frac{\text{تعداد مول یا مولکول گاز A}}{\text{تعداد مول یا مولکول گاز B}} \Rightarrow \frac{V_1}{n_1} = \frac{V_2}{n_2}$$

$$(1) \quad \frac{\text{حجم}}{\text{جرم مولی}} = \frac{\text{جرم}}{\text{تعداد مول}}$$

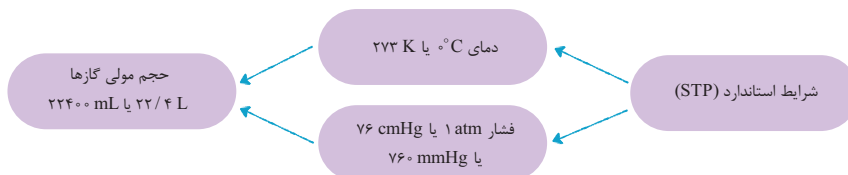
۱ چگالی یا جرم حجمی یک گاز، از تقسیم جرم مولی بر حجم مولی گاز مورد نظر در شرایط مورد نظر به دست می‌آید:

$$(2) \quad (\rho) = \frac{M_w(\text{جرم مولی})}{V(\text{حجم مولی})}$$

۲ برای محاسبه نسبت چگالی دو گاز در دما و فشار یکسان، کافی است جرم مولی دو گاز را به هم تقسیم کنیم؛ زیرا مطابق قانون آووگادرو، حجم مولی همه گازها در شرایط یکسان با هم برابر است.

$$(3) \quad \text{نسبت چگالی دو گاز} = \frac{M_{w2}}{M_{w1}} = \frac{P_2}{P_1}$$

– شرایط استاندارد یا STP –



دقت کنید که،

در شرایط استاندارد یا STP، شرایط دمایی در دمای اتاق نیست!

در شرایط استاندارد هر یک مول از هر نوع گازی، ۲۲/۴ لیتر یا ۲۲۴۰۰ میلی‌لیتر حجم دارد که به این مقدار، حجم مولی گازها در شرایط استاندارد یا STP می‌گوییم.

دقت کنید که،

برای به دست آوردن حجم یک گاز در شرایط غیراستاندارد از چگالی آن استفاده می‌کنیم.

– استوکیومتری واکنش –

۱ به بخشی از دانش شیمی که به ارتباط کتی میان مواد شرکت‌کننده (واکنش‌دهنده‌ها و فراورده‌ها) در هر واکنش می‌پردازد، استوکیومتری واکنش می‌گویند.

۲ دانشی که کمک می‌کند تا شیمی‌دان‌ها و مهندسان در آزمایشگاه و صنعت با بهره‌گیری از آن، مشخص کنند که برای تولید مقدار معینی از یک فراورده به چه مقدار از هر واکنش‌دهنده نیاز است.

نکات مهم

۱ به هر یک از ضرایب مواد شرکت‌کننده در یک معادله موازنه‌شده ضریب استوکیومتری می‌گویند.

۲ دقت کنید که در محاسبات استوکیومتری فقط از معادله موازنه‌شده باید استفاده کنیم! یعنی اولین گام در حل تست‌های استوکیومتری، موازنه‌کردن معادله واکنش داده‌شده است.

زیرا معادله موازنه‌شده واکنش است که ضرایب را مشخص می‌کند (ضرایب استوکیومتری) که مواد موجود در واکنش متناسب با آن تولید یا مصرف می‌شود و این ضرایب رابطه مولی بین تعداد ذرات واکنش‌دهنده (ها) و فراورده (ها) را نشان می‌دهد.



مرورنامه آزمون آزمایشی خیل سبز

شیمی

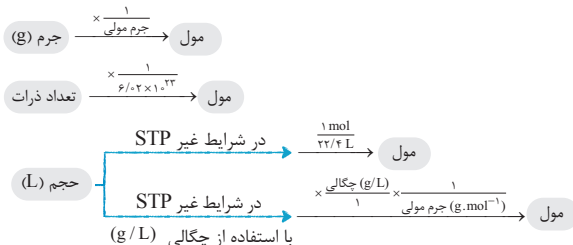
روشن کلی حل مسائل استوکیومتری واکنش

در حل این مسائل به دو روش می توان عمل کرد:

۱- استفاده از کسر تبدیل

در این روش سه مرحله زیر را باید انجام داد:

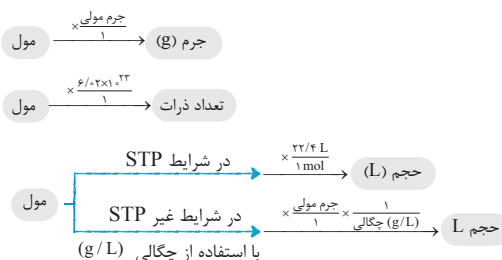
مرحله اول: با استفاده از کسر تبدیل های مناسب، مقدار ماده داده شده (A) را به تعداد مول آن تبدیل می کنیم:



مرحله دوم: تعداد مول ماده داده شده (A) را که در مرحله قبل حساب کردیم، با استفاده از ضرایب استوکیومتری مواد در معادله موازنه شده به تعداد مول ماده خواسته شده (B)، تبدیل می کنیم.

$$\text{تعداد مول B} = \text{ضریب استوکیومتری B} \times \text{تعداد مول A}$$

مرحله سوم: تعداد مول ماده خواسته شده (B) را به کمیتی از آن که در مسئله مورد نظر است، تبدیل می کنیم (برعکس مرحله اول):



۲- حل مسائل به روش تناسب

در این روش، کافی است با توجه به یکاهای مطرح شده در صورت مسئله، با کمک دوتا از کسرهای تناسب زیر، یک معادله تشکیل داده و مجهول مورد نظر را به دست آورد:

$$\frac{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} = \frac{\text{حجم گاز} \times \text{ضریب}}{\text{حجم گاز} \times \text{ضریب}} = \frac{\text{تعداد ذره}}{\text{تعداد ذره}} = \frac{\text{جرم}}{\text{جرم}} = \frac{\text{حجم گاز (mL)}}{\text{حجم گاز (L)}} = \frac{\text{حجم گاز (mL)}}{\text{حجم گاز (L)}} = \frac{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}$$

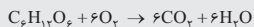
توجه: منظور از ضریب در تناسب های فوق، ضریب استوکیومتری ماده مورد نظر در معادله موازنه شده واکنش است.

مثال

اگر بدن انسان در دما و فشار ثابت و معینی به طور میانگین در هر شبانه روز 336 L گاز اکسیژن مصرف کند، در هر شبانه روز چند گرم گلوکز ($\text{C}_6\text{H}_{12}\text{O}_6$)

مصرف می شود؟ (چگالی گاز اکسیژن را $1/4 \text{ g.L}^{-1}$ در نظر بگیرید). ($\text{O} = 16, \text{C} = 12, \text{H} = 1; \text{g.mol}^{-1}$)

$$\begin{array}{llll} 874 & (4) & 546 & (3) & 441 & (2) & 315 & (1) \end{array}$$



$$\text{C}_6\text{H}_{12}\text{O}_6 \text{ جرم مولی } : 6(12) + 12(1) + 6(16) = 180 \text{ g.mol}^{-1}$$

$$336 \text{ L O}_2 \times \frac{1/4 \text{ g O}_2}{1 \text{ L O}_2} \times \frac{1 \text{ mol O}_2}{32 \text{ g O}_2} \times \frac{1 \text{ mol C}_6\text{H}_{12}\text{O}_6}{6 \text{ mol O}_2} \times \frac{180 \text{ g C}_6\text{H}_{12}\text{O}_6}{1 \text{ mol C}_6\text{H}_{12}\text{O}_6} = 441 \text{ g C}_6\text{H}_{12}\text{O}_6$$

روش اول: استفاده از کسر تبدیل:

$$\frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} = \frac{\text{حجم} \times \text{چگالی}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} \quad \frac{x}{1 \times 180} = \frac{1/4 \times 336}{6 \times 32} \quad x = \frac{180 \times 1/4 \times 336}{6 \times 32}$$

روش دوم: استفاده از کسر تناسب:

$$x = 30 \times 0.7 \times 21 = 21 \times 21 = 441 \text{ g C}_6\text{H}_{12}\text{O}_6$$



مثال اگر مخلوطی از گازهای هیدروژن و متان (در شرایط استاندارد) به طور کامل بسوزند و مقدار $5/6$ لیتر گاز کربن دی‌اکسید (در شرایط استاندارد) و $11/25$ گرم

آب تولید کنند، چند درصد حجمی این مخلوط را گاز متان تشکیل می‌دهد؟ ($O=16, C=12, H=1; \text{g.mol}^{-1}$)

(سراسری ریاضی خارج از کشور ۸۷ و سراسری تهرانی ۸۸)

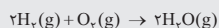
۲۵/۲۵ (۲)

۲۵/۱۲ (۱)

۶۶/۶۶ (۴)

۳۳/۳۳ (۳)

پاسخ گزینه (۴): **روش اول:** معادله واکنش سوختن هیدروژن و متان به صورت زیر است:



همان‌طور که می‌بینید CO_2 فقط بر اثر سوختن متان به دست می‌آید؛ پس در اولین حرکت! باید با استفاده از حجم CO_2 ، حجم گاز متان موجود در این مخلوط را حساب کنیم:

$$\frac{5/6 \text{ L } CO_2}{22/4 \text{ L } CO_2} \times \frac{1 \text{ mol } CO_2}{22/4 \text{ L } CO_2} \times \frac{1 \text{ mol } CH_4}{1 \text{ mol } CO_2} \times \frac{22/4 \text{ L } CH_4}{1 \text{ mol } CH_4} = 5/6 \text{ L } CH_4$$

در حرکت بعدی! باید ببینیم که بر اثر سوختن $5/6$ لیتر گاز CH_4 ، چند گرم H_2O به دست می‌آید:

$$\frac{5/6 \text{ L } CH_4}{22/4 \text{ L } CH_4} \times \frac{1 \text{ mol } CH_4}{22/4 \text{ L } CH_4} \times \frac{2 \text{ mol } H_2O}{1 \text{ mol } CH_4} \times \frac{18 \text{ g } H_2O}{1 \text{ mol } H_2O} = 9 \text{ g } H_2O$$

فب! تا این‌جا فهمیدیم که از $11/25$ گرم H_2O تولید شده، ۹ گرم آن مربوط به سوختن گاز CH_4 بود؛ پس حتماً بقیه آن یعنی $2/25$ گرم، مربوط به سوختن H_2 است. حالا باید حساب کنیم که برای تولید $2/25$ گرم H_2O ، چند لیتر H_2 باید بسوزد:

$$\frac{2/25 \text{ g } H_2O}{18 \text{ g } H_2O} \times \frac{1 \text{ mol } H_2O}{18 \text{ g } H_2O} \times \frac{2 \text{ mol } H_2}{1 \text{ mol } H_2O} \times \frac{22/4 \text{ L } H_2}{1 \text{ mol } H_2} = 2/8 \text{ L } H_2$$

آتش! رنگه داره تموم می‌شه!
درصد حجمی گاز CH_4 = $\frac{\text{حجم گاز } CH_4}{\text{حجم گاز } CH_4 + \text{حجم گاز } H_2} \times 100 = \frac{5/6}{5/6 + 2/8} \times 100 = 66/66\%$

روش دوم: آله بقوایم قبلی شیک و مهلسی! حلش کنیم، ابتدا تعداد مول متان را به دست می‌آوریم:

$$\frac{5/6 \text{ L } CO_2}{22/4 \text{ L } CO_2} \times \frac{1 \text{ mol } CO_2}{22/4 \text{ L } CO_2} \times \frac{1 \text{ mol } CH_4}{1 \text{ mol } CO_2} = 0/25 \text{ mol } CH_4$$

حالا باید ببینیم بر اثر سوختن $0/25$ مول CH_4 ، چند گرم H_2O به دست می‌آید:

$$0/25 \text{ mol } CH_4 \times \frac{2 \text{ mol } H_2O}{1 \text{ mol } CH_4} \times \frac{18 \text{ g } H_2O}{1 \text{ mol } H_2O} = 9 \text{ g } H_2O$$

پس $2/25$ گرم H_2O باقی‌مانده مال H_2 می‌باشد! پس تعداد مول H_2 برابر است با:

$$\frac{2/25 \text{ g } H_2O}{18 \text{ g } H_2O} \times \frac{1 \text{ mol } H_2O}{18 \text{ g } H_2O} \times \frac{2 \text{ mol } H_2}{1 \text{ mol } H_2O} = 0/125 \text{ mol } H_2$$

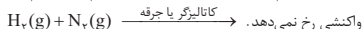
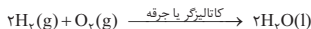
در شرایط یکسان دما و فشار، نسبت‌های حجمی گازها برابر با نسبت‌های مولی آن‌ها است؛ بنابراین تمام شد!

$$\text{درصد حجمی (مولی) گاز } CH_4 = \frac{\text{مول گاز } CH_4}{\text{مول گاز } CH_4 + \text{مول گاز } H_2} \times 100 = \frac{0/25}{0/25 + 0/125} \times 100 = 66/66\%$$

– تولید آمونیاک، کاربردی از واکنش گازها در صنعت –

۱ گاز نیتروژن، فراوان‌ترین جزء سازنده هواکره بوده که در مقایسه با اکسیژن از نظر شیمیایی غیرفعال و واکنش‌ناپذیر است.

۲ برای مثال، مخلوط گازهای اکسیژن و هیدروژن در حضور کاتالیزگر یا جرقه در یک واکنش سریع و شدید، متفجر می‌شود و آب تولید می‌کند. اما در مخلوط گازهای نیتروژن و هیدروژن، حتی در حضور کاتالیزگر یا جرقه واکنش رخ نمی‌دهد.



۳ پس گاز نیتروژن در مقایسه با اکسیژن از نظر شیمیایی غیرفعال و واکنش‌ناپذیر است. از این‌رو گاز نیتروژن به جو بی‌اثر شهرت یافته و در محیط‌هایی که گاز اکسیژن، عامل ایجاد تغییر شیمیایی است به جای آن از گاز نیتروژن استفاده می‌کنند.

۴ برای پرکردن و تنظیم باد تایر خودرو به جای هوا از گاز نیتروژن استفاده می‌شود.

۵ در سال ۱۹۱۸ میلادی، دانشمندی به نام فریتس هابر شیمی‌دان معروف آلمانی، به دلیل تهیه آمونیاک از گازهای N_2 و H_2 ، برنده جایزه نوبل شیمی شد. هابر واکنش زیر را مبنای پژوهش‌های خود قرار داد:



۶ مشکل اصلی هابر یافتن شرایط بهینه برای انجام این واکنش بود. او در این راستا با دو چالش عمده مواجه بود:

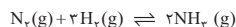


۱. واکنش در دما و فشار اتاق انجام نمی‌شد.

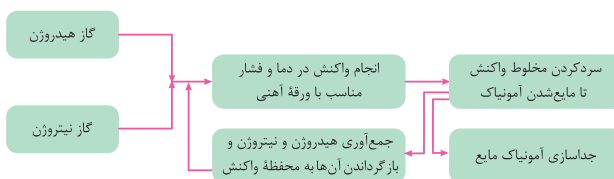
- ۱) هابر با تلاش‌ها و آزمایشات فراوان واکنش میان گازهای هیدروژن و نیتروژن را بارها در دماها و فشارهای مختلف انجام داد تا بتواند شرایط بهینه آن را پیدا کند.
- ۲) سرانجام دریافت که اگر مخلوط این گازها از روی ورقه آهنی (به عنوان کاتالیزگر) در دما و فشار مناسب (به عنوان نکته اضافه بدانید! دمای 450°C درجه سلسیوس و فشار 200 atm) عبور داده شود، با انجام واکنش، مقدار قابل توجهی آمونیاک تولید می‌شود، اما همه واکنش‌دهنده‌ها به فراورده‌ها تبدیل نخواهد شد؛ زیرا این واکنش برگشت‌پذیر است؛ با این توصیف در ظرف واکنش مخلوطی از سه گاز H_2 ، N_2 و NH_3 وجود دارد. اکنون هابر با مشکل دیگری هم روبه‌رو بود:

۲. چگونه آمونیاک (فراورده واکنش) را از مخلوط واکنش جدا کند.

- ۱) او با بررسی نقطه جوش این مواد، راه‌حلی را برای جداسازی آمونیاک پیدا کرد.
- هابر پس از انجام واکنش، دما را کمی پایین‌تر از نقطه جوش آمونیاک آورد تا فقط آمونیاک مایع شده و از مخلوط خارج شود. در فرایند هابر، گازهای H_2 و N_2 واکنش نداده و بازگردانی کرده و به ظرف اصلی واکنش برمی‌گردانند تا دوباره با هم واکنش دهند.



جمع‌بندی



پایه دوازدهم

— مقدمه —

- ۱) کره زمین سامانه‌ای بزرگ شامل ۴ بخش مختلف است:
 - ۱) هواکره (شامل گازها و ذرات ریز و مولکول‌های کوچک O_2 و N_2 و ...)
 - ۲) آب‌کره (شامل مولکول‌های کوچک آب، یون‌ها و ...)
 - ۳) سنگ‌کره (شامل مواد جامد مانند ماسه، نمک‌ها و ...)
 - ۴) زیست‌کره (شامل موجودات زنده و جانداران روی کره زمین. در واکنش‌های زیست‌کره، درشت‌مولکول‌ها نقش اساسی ایفا می‌کنند).
- توجه** زمین از دیدگاه شیمیایی پویاست؛ یعنی همواره بخش‌های گوناگون کره زمین با یکدیگر برهم‌کنش فیزیکی و شیمیایی داشته و بین آن‌ها مواد گوناگون مبادله می‌شود.

نکات مهم

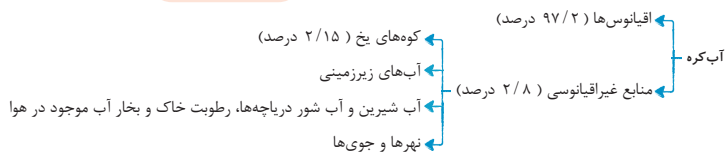
- ۱) زمین در فضا به رنگ آبی دیده می‌شود؛ زیرا نزدیک به ۷۵٪ سطح آن را آب پوشانده است، به گونه‌ای که جرم کل آب‌های روی کره زمین در حدود 1.5×10^{18} تن برآورد می‌شود.
- ۲) بخش عمده (نه همه!) آب‌های روی کره زمین در اقیانوس‌ها و دریاها توزیع شده است، به گونه‌ای که اگر کره زمین را مسطح فرض کنیم، آب همه سطح آن را تا ارتفاع بیش از ۲ کیلومتر می‌پوشاند.
- ۳) آب اقیانوس‌ها و دریاها مخلوطی همگن است که اغلب مزه‌ای شور دارد، زیرا مقدار قابل توجهی از نمک‌های گوناگون در آن حل شده است. (حدوداً 5×10^{16} تن)

❖ نکته خیلی مهم این‌که سالانه میلیاردها تن مواد گوناگون نیز از سنگ‌کره وارد آب‌کره می‌شود ولی از آن‌جا که جرم کل مواد حل‌شده در آب‌های کره زمین تقریباً (نه دقیقاً) ثابت است، پس باید همین مقدار نیز از آب دریاها و اقیانوس‌ها خارج شود.

- ۲) درون کره زمین و بین این چهار بخش مختلف، پیوسته مواد گوناگونی مبادله می‌شود؛ مثلاً سالانه:
 - حجم عظیمی از بخار آب از دریاها (آب‌کره) وارد هواکره می‌شود و به صورت بارش از هواکره وارد آب‌کره و سنگ‌کره می‌شود.
 - میلیاردها تن کربن دی‌اکسید توسط آبزیان از آب‌کره وارد هواکره شده و مقادیر بسیار زیادی از گاز اکسیژن محلول در آب توسط آبزیان مصرف می‌شود.
 - گازهای گوناگون و مواد شیمیایی جامد توسط فعالیت آتشفشانی به صورت گرد و غبار وارد هواکره می‌شود.
 - لاشه جانوران و گیاهان بر اثر تجزیه به صورت مولکول‌های کوچک‌تری از زیست‌کره وارد آب‌کره، سنگ‌کره یا هواکره می‌شود.
 - موجودات زنده نیز سالانه مقدار بسیار زیادی از ترکیبات کربن‌دار را وارد بخش‌های گوناگون کره زمین می‌کنند.



منابع آب



با توجه به نمودار فوق، کوه‌های یخ، حدود ۷۷ درصد از کل منابع غیراقیانوسی آب کره را تشکیل می‌دهند.

یون‌های حل‌شده در آب دریاها -

نام یون	کلرید	سدیم	سولفات	منیزیم	کلسیم	پتاسیم	کربنات	برمید
نماد	Cl^-	Na^+	SO_4^{2-}	Mg^{2+}	Ca^{2+}	K^+	CO_3^{2-}	Br^-
رتبه فراوانی	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸

دریا $\text{Cl}^- > \text{SO}_4^{2-} > \text{CO}_3^{2-} > \text{Br}^-$ مقدار آنیون‌ها در آب دریا

دریا $\text{Na}^+ > \text{Mg}^{2+} > \text{Ca}^{2+} > \text{K}^+$ مقدار کاتیون‌ها در آب دریا

دریا $\text{Cl}^- > \text{Na}^+ > \text{SO}_4^{2-} > \text{Mg}^{2+} > \text{Ca}^{2+} > \text{K}^+ > \text{CO}_3^{2-} > \text{Br}^-$ مقدار یون‌ها در آب دریا

فراوان‌ترین (یون) آنیون حل‌شده در آب دریاها، یون کلرید (Cl^-) است که یون تک‌اتمی محسوب می‌شود اما فراوان‌ترین آنیون چنداتمی موجود در آب دریاها، یون سولفات (SO_4^{2-}) است.

در بین موارد جدول صفحه قبل، دو آنیون تک‌اتمی، هر دو مربوط به عناصر گروه ۱۷ جدول تناوبی هستند.

فراوان‌ترین کاتیون موجود در آب دریاها، یون سدیم (Na^+) است که مربوط به عنصر گروه ۱ جدول تناوبی است.

از میان کاتیون‌های فراوان آب دریاها، دو یون مربوط به عناصر گروه ۱ و دو یون مربوط به عناصر گروه ۲ جدول تناوبی هستند.

وجود انواع یون‌ها در آب دریا به دلیل انحلال نمک‌های گوناگون در آن است.

بیشتر آب‌های روی زمین شور است و نمی‌توان از آن‌ها در کشاورزی، مصارف خانگی و صنعتی استفاده کرد؛ از این رو تهیه آب شیرین و آشامیدنی، همچنین آب قابل استفاده در کشاورزی، صنعت و ... یکی از چالش‌های اساسی در سطح جهان است.

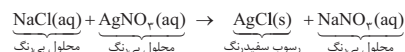
آب اغلب چشمه‌ها، قنات‌ها و رودخانه‌ها که زلال و شفاف و همین‌طور شیرین، گوارا و آشامیدنی است، ناخالص می‌باشد.

آب باران در هوای پاک تقریباً خالص است؛ زیرا هنگام تشکیل برف و باران، تقریباً همه مواد حل‌شده در آب از آن جدا می‌شود. این فرایند، الگوی برای تهیه آب خالص است که تقطیر و فراورده آن، آب مقطر نام دارد.

شناسایی برخی از یون‌های محلول در آب -

الف) شناسایی یون کلرید (Cl^-) در آب:

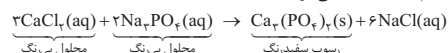
یکی از روش‌های شناسایی یون کلرید موجود در یک محلول ($\text{Cl}^-(\text{aq})$)، استفاده از محلولی حاوی یون نقره ($\text{Ag}^+(\text{aq})$) است که در این صورت رسوب سفیدرنگ $\text{AgCl}(\text{s})$ تولید می‌شود:



ب) شناسایی یون کلسیم (Ca^{2+}) در آب:

۱) یون کلسیم محلول در آب ($\text{Ca}^{2+}(\text{aq})$) با یون فسفات ($\text{PO}_4^{3-}(\text{aq})$)، رسوب سفیدرنگ کلسیم فسفات ($\text{Ca}_3(\text{PO}_4)_2(\text{s})$) تولید می‌کند.

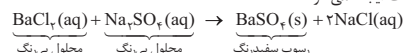
۲) واکنش دو محلول بی‌رنگ سدیم فسفات و کلسیم کلرید که طی واکنش، رسوب سفیدرنگ کلسیم فسفات ایجاد می‌شود:



پ) شناسایی یون باریم (Ba^{2+}) در آب:

۱) یون باریم محلول در آب ($\text{Ba}^{2+}(\text{aq})$) با یون سولفات ($\text{SO}_4^{2-}(\text{aq})$)، رسوب سفیدرنگ باریم سولفات ($\text{BaSO}_4(\text{s})$) تولید می‌کند.

۲) واکنش دو محلول بی‌رنگ باریم کلرید و سدیم سولفات که طی واکنش، رسوب سفیدرنگ باریم سولفات ایجاد می‌شود:



آب آشامیدنی -

۱) آب آشامیدنی، مخلوطی زلال و همگن بوده و مقدار کمی از یون‌های گوناگون دارد.

۲) برخی از یون‌ها در مراکز تأمین آب آشامیدنی به آب افزوده می‌شوند؛ مانند: یون فلوئورید (F^-) که سبب حفظ سلامت دندان‌ها شده و مقدار بسیار کم و مناسبی به آب اضافه می‌شود.

۳) تفاوت آب آشامیدنی و دیگر آب‌ها در نوع و مقدار حل‌شونده‌های آن است.

انواع یون از نظر تعداد اتم -

الف) یون تک‌اتمی: یونی که فقط از یک اتم (نه عنصر) تشکیل شده است، مانند: Na^+ ، Ca^{2+} و ...
 ب) یون چنداتمی: یونی که از اتصال دو یا چند اتم تشکیل شده است، مانند: OH^- ، NO_3^- ، NH_4^+ و ...

نکات مهم

- در یک یون چنداتمی، بار یون به اتم خاصی تعلق نداشته و به کل یون تعلق دارد.
- دقت کنید که یون‌هایی مانند N^- (آزید)، O_2^{2-} (پراکسید) و ... اگرچه از یک نوع اتم تشکیل شده‌اند ولی چون بیش از یک اتم دارند، جزء یون‌های چنداتمی هستند.

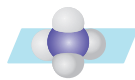
ردیف	نام یون	فرمول شیمیایی	مدل فضاپرکن	ساختار لوویس
۱	آمونیم	NH_4^+		
۲	هیدروکسید	OH^-		
۳	نیتрат	NO_3^-		
۴	سولفات	SO_4^{2-}		
۵	فسفات	PO_4^{3-}		
۶	کربنات	CO_3^{2-}		

● در مدل فضا پرکن یون هیدروکسید (OH^-)، دو اتم اکسیژن (O) و هیدروژن (H) در یک صفحه قرار دارند، همچنین در مدل فضاپرکن یون کربنات (CO_3^{2-}) یا نیترات (NO_3^-) تمام اتم‌ها در یک صفحه فرضی جا شده‌اند، اما مثلاً در مدل فضاپرکن یون آمونیم (NH_4^+) تنها ۳ اتم

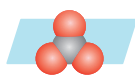
هیدروژن در یک صفحه جا شده است و اتم هیدروژن چهارم در خارج از صفحه قرار گرفته است؛

با توجه به مدل فضاپرکن یون‌های سولفات (SO_4^{2-}) و فسفات (PO_4^{3-})، این دو یون نیز

همانند یون آمونیم، ساختار مسطح ندارند.



NH_4^+



CO_3^{2-}



OH^-

نکته مهم

فکر نکنید که عنصرهای تشکیل‌دهنده همه یون‌های چنداتمی صرفاً نافلز هستند. برای مثال در ساختار یون پرمنگنات (MnO_4^-)، فلز وجود دارد!

یادآوری نام‌گذاری ترکیب‌های یونی

● نام‌گذاری ترکیب‌های یونی چندتایی (مانند: CaSO_4 ، NH_4NO_3 و ...) همانند نام‌گذاری ترکیب‌های یونی دوتایی (مانند NaCl ، CaCl_2 و ...) بوده و به صورت روبه‌رو است: نام کاتیون + نام آنیون

اگر فلز کاتیون دارای ظرفیت متغیر باشد، باید ظرفیت آن به صورت عدد رومی داخل پرانتز ذکر شود.

فرمول‌نویسی ترکیب‌های یونی چندتایی

۱) مانند فرمول‌نویسی ترکیب‌های یونی دوتایی، کاتیون را به سمت چپ و آنیون را سمت راست می‌نویسیم. با توجه به این که یک ترکیب یونی خنثی است، بر این اساس شمار کاتیون‌ها و آنیون‌ها را مشخص می‌کنیم.

۲) ظرفیت کاتیون را با آنیون جابه‌جا می‌کنیم. (ظرفیت یون برابر بار یون بدون علامت است.)



- توجه کنید که اگر کاتیون یا آنیون چندتایی باشد، ابتدا دور کاتیون یا آنیون پرانتز گذاشته و سپس زیروندها را جابه‌جا می‌کنیم.
- ۳) زیروندها را اگر ساده می‌شوند، ساده می‌کنیم و از نوشتن زیروند ۱ خودداری می‌کنیم.

نکته مهم

در یک مول ترکیب یونی، تعداد الکترون‌های مبادله‌شده بین کاتیون و آنیون برابر است با:

$$|\text{بار آنیون}| \times \text{تعداد آنیون یا بار کاتیون} \times \text{تعداد کاتیون} = \text{تعداد الکترون‌های مبادله‌شده}$$

نکات مهم

- ۱) گیاهان برای رشد مناسب، افزون بر CO_2 و H_2O ، به عنصرهایی مانند N, P, S و ... نیاز دارند.
 - ۲) آمونیوم سولفات $((\text{NH}_4)_2\text{SO}_4)$ یکی از کودهای شیمیایی است که دو عنصر نیتروژن و گوگرد را در اختیار گیاه قرار می‌دهد.
 - ۳) ساختار لوویس یون‌های سازنده آمونیوم سولفات به صورت مقابل است:
 - ۴) از انحلال هر واحد فرمولی آمونیوم سولفات در آب، سه یون تولید می‌شود و در مجموع از لحاظ بار الکتریکی خنثی است:
- $$(\text{NH}_4)_2\text{SO}_4(s) \xrightarrow{\text{در آب}} 2\text{NH}_4^+(aq) + \text{SO}_4^{2-}(aq)$$
- مجموعاً ۳ مول یون
- ۵) در ساختار آمونیوم سولفات، دو نوع پیوند کووالانسی و یونی وجود دارد اما این ماده در مجموع یک ترکیب یونی محسوب می‌شود.

- در اغلب ترکیبات یونی، حداقل یک فلز وجود دارد، اما آمونیوم سولفات برخلاف این قاعده کلی، هیچ عنصر فلزی ندارد و چهار عنصر سازنده آن، نافلزی هستند!

مقدمه

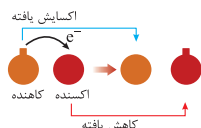
- پدیده‌های طبیعی همچون تندر و آذرخش از ماهیت الکتریکی ماده سرچشمه می‌گیرند و شامل دادوستد الکترون می‌شوند.
 - الکتروشیمی شاخه‌ای از دانش شیمی است که به رابطه میان واکنش‌های شیمیایی و جریان‌های الکتریکی می‌پردازد و در بهبود خواص مواد و تأمین انرژی نقش بسزایی دارد.
 - علم الکتروشیمی دارای دستاوردهای زیادی بوده که از جمله آن‌ها می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:
- ۱) تولید انرژی الکتریکی پاک و ارزان
 - ۲) افزایش سطح رفاه و آسایش در جهان
 - ۳) تهیه مواد جدید
 - ۴) پیاده‌کردن اصول شیمی سبز
- باتری، سمعک، انتقال ایمن آب آشامیدنی و قطار برقی، نمونه‌هایی از فناوری‌هایی هستند که نقش الکتروشیمی را در رفاه و آسایش نشان می‌دهند.

– برخی از قلمروهای الکتروشیمی –

- ۱) تأمین انرژی (باتری‌ها، سلول سوختی و سوخت آن‌ها)
 - ۲) تولید مواد (مانند برق‌کافت و آبکاری)
 - ۳) اندازه‌گیری و کنترل کیفی (اطمینان از کیفیت فرآورده)
- ساخت لوله‌های فلزی انتقال آب، قوطی‌های محتوی مواد غذایی، لوازم آشپزی که در برابر خوردگی مقاوم هستند و مانع از آلوده شدن آب و مواد غذایی می‌شوند، هم‌چنین کسب اطمینان از کیفیت تولید فرآورده‌های دارویی، بهداشتی و غذایی، چهره‌های دیگری از استفاده‌های علم الکتروشیمی هستند.

– انجام واکنش با سفر الکترون –

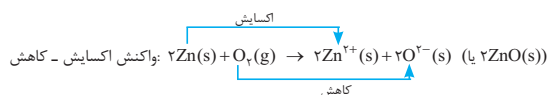
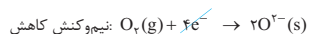
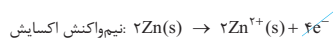
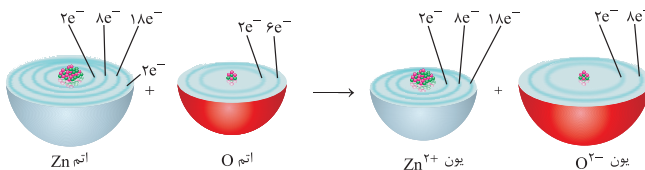
- باتری مولدی است که در محل مورد نیاز با انجام واکنش‌های شیمیایی، الکتریسیته تولید می‌کند. در باتری واکنش‌های شیمیایی رخ می‌دهد تا بخشی از انرژی شیمیایی مواد به انرژی الکتریکی تبدیل شود.
- یکی از راه‌های بهره‌گیری از انرژی ذخیره‌شده در فلزها، اتصال آن‌ها در شرایط مناسب به یکدیگر است. برای نمونه با یک تیغه مسی و تیغه‌ای دیگر مانند روی و با میوه‌ای مانند لیمو می‌توان نوعی باتری ساخت و با آن یک لامپ LED را روشن کرد.
- چراغ خورشیدی یک ابزار روشنایی است که از لامپ LED، سلول خورشیدی و باتری قابل شارژ تشکیل شده است.
- در الکتروشیمی، فرایند گرفتن الکترون را، فرایند کاهش و فرایند از دست دادن الکترون را فرایند اکسایش می‌نامیم.
- ماده‌ای که با گرفتن الکترون، خود کاهش یافته ولی سبب اکسایش گونه دیگر می‌شود، اکسنده و ماده‌ای که با از دست دادن الکترون، خود اکسایش یافته ولی سبب کاهش گونه دیگر می‌شود، کاهنده نام دارد.



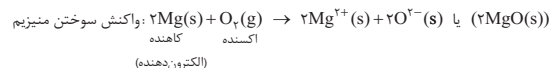
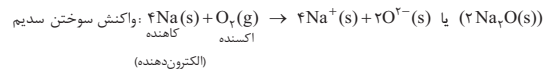
اکسایش یافته = کاهنده
کاهش یافته = اکسنده

پس:

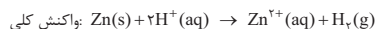
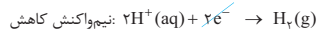
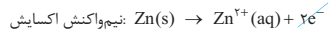
- اغلب فلزها در واکنش با نافلزها تمایل دارند یک یا چند الکترون خود را به نافلزها داده و ضمن اکسایش به کاتیون تبدیل شوند. نافلزها با گرفتن یک یا چند الکترون کاهش یافته و به آنیون تبدیل می‌شوند. فلزها اغلب کاهشدهنده و نافلزها اغلب اکسند هستند.
- اکسیژن نافلزی فعال است که با اغلب فلزها واکنش می‌دهد و آن‌ها را به اکسید فلز تبدیل می‌کند، در حالی که با برخی فلزها مانند طلا و پلاتین واکنش نمی‌دهد. هر اتم اکسیژن حین واکنش با فلزها، دو الکترون از فلز گرفته و طی این فرایند، به یون اکسید (O^{2-}) تبدیل می‌شود.
- شیمی‌دان‌ها هر یک از فرایندهای گرفتن و از دست دادن الکترون را با یک نیم‌واکنش (به ترتیب نیم‌واکنش کاهش و نیم‌واکنش اکسایش) نمایش می‌دهند که هر نیم‌واکنش باید از لحاظ جرم (شمار اتم‌ها) و بار الکتریکی موازنه باشد (از مجموع دو نیم‌واکنش اکسایش و کاهش، یک واکنش اکسایش - کاهش حاصل می‌شود). شکل زیر الگویی، از واکنش بین اتم‌های روی و اکسیژن را نشان می‌دهد:



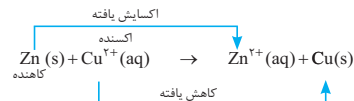
- فلزهایی مانند Na و Mg در اکسیژن می‌سوزند و نور و گرما تولید می‌کنند. در گذشته برای عکاسی از فرایند سوختن منیزیم به عنوان منبع نور استفاده می‌شده است. در این واکنش، فلز منیزیم اکسید شده و به $MgO(s)$ تبدیل می‌شود. در واکنش مورد نظر، منیزیم کاهشدهنده و اکسیژن اکسند است.



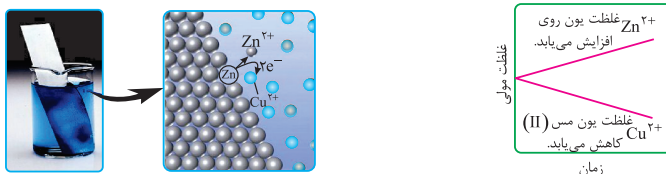
- اغلب فلزها (نه همه‌شون!) در واکنش با محلول اسیدها، گاز هیدروژن و نمک تولید می‌کنند. در این واکنش‌ها، فلز کاهشدهنده و یون هیدروژن، اکسند است:



- هرگاه تیغهای از جنس فلز روی درون محلول مس (II) سولفات آبی‌رنگ قرار گیرد، به دلیل انجام واکنش اکسایش - کاهش و کاهش‌یافتن یون $Cu^{2+}(aq)$ و تبدیل شدن آن به فلز Cu، به تدریج از شدت رنگ محلول کاسته می‌شود:



- به دلیل این که هر دو ماده ضریب یکسانی در معادله واکنش دارند، افزایش و کاهش آن‌ها با شیب یکسان انجام می‌شود.

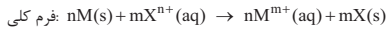


- همه واکنش‌ها با تبادل انرژی همراه‌اند. در برخی از واکنش‌های اکسایش - کاهش، افزون بر دادوستد الکترون، انرژی نیز آزاد می‌شود. فرورده‌ها پایدارتر از واکنش‌دهنده‌ها و $\Delta H < 0$ و واکنش گرماده.

مرورنامه آزمون آزمایشی خیلی سبز



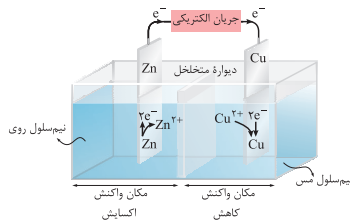
- تمایل فلزها برای از دست دادن الکترون در محلول‌های آبی یکسان نیست. به دیگر سخن، فلزها قدرت کاهندگی متفاوتی دارند. برای نمونه فلز روی کاهنده‌تر از مس است. در واکنش‌هایی از این دست که به صورت خودبه‌خودی انجام می‌شوند، مخلوط واکنش گرم‌تر می‌شود؛ زیرا سامانه واکنش بخشی از انرژی خود را به شکل گرما به محیط می‌دهد.
- تغییر دمای مخلوط واکنش، بیانگر آزادشدن انرژی است، که هر چه این تغییر بیشتر باشد $\leftarrow$ تمایل فلز برای از دست دادن الکترون بیشتر است.
- در واکنش اکسایش - کاهش، فلزی که قدرت کاهندگی بیشتری دارد، می‌تواند با برخی کاتیون‌های فلزی واکنش دهد و آن‌ها را به اتم‌های فلزی بکاهد (کاهش دهد).
- قدرت کاهندگی فلزات: روی $<$ مس $<$ نقره $<$ طلا
- فرم کلی واکنش موازنه‌شده فلز کاهنده‌تر M با کاتیون X^{n+} را به صورت زیر می‌توان نوشت:



- تعداد الکترون‌های مبادله‌شده در واکنش‌های اکسایش - کاهش، برابر است با:
- ضریب عنصر کاهنده (یا اکسند) $\times$ اندیس عنصر کاهنده (یا اکسند) $\times$ تغییر عدد اکسایش عنصر کاهنده (یا اکسند) = تعداد الکترون مبادله‌شده

– سلول‌های گالوانی –

- برای ایجاد جریان الکتریکی باید الکترون‌ها را از یک مسیر معین عبور داد یا از نقطه‌ای به نقطه دیگر جابه‌جا نمود؛ بنابراین برای استفاده از جریان الکتریکی حاصل از واکنش‌های اکسایش - کاهش، از سلول‌های گالوانی استفاده می‌کنیم (سلول گالوانی دستگاهی است که می‌تواند براساس قدرت کاهندگی فلزها، انرژی الکتریکی تولید کند).
- نیم‌سلول: به طور کلی هرگاه یک تیغه فلزی (الکتروتود) در محلولی از کاتیون‌های خودش (الکترولیت) قرار گرفته باشد، به مجموعه حاصل، نیم‌سلول می‌گویند.
- سلول گالوانی، سلولی است که شامل دو نیم‌سلول می‌شود. به طور مثال، در سلول روی - مس، تیغه روی درون محلولی از روی سولفات (نیم‌سلول روی) و تیغه مس درون محلولی از مس (II) سولفات (نیم‌سلول مس) قرار می‌گیرد. در این سلول، روی نقش کاهنده و یون‌های مس نقش اکسند را دارد. نیم‌سلول‌ها توسط سیم (مدار خارجی) به یکدیگر وصل می‌شوند و الکترون‌ها در مدار بیرونی جابه‌جا شده و جریان الکتریکی ایجاد می‌شود. تصویر زیر، نمایی از این سلول را نشان می‌دهد:



- در هر دو نیم‌سلول، نیم‌واکنش‌ها به طور خودبه‌خودی انجام می‌شوند.
- سلول گالوانی سه جزء دارد:

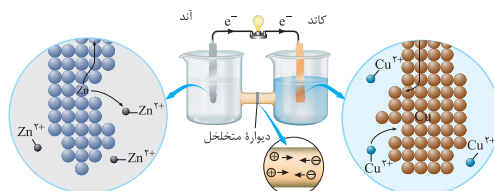
- ۱) کاتد: قطب مثبت $\leftarrow$ محل انجام نیم‌واکنش کاتدی (کاهش)
- ۲) آند: قطب منفی $\leftarrow$ محل انجام نیم‌واکنش آندی (اکسایش)
- ۳) دیواره متخلخل (محل عبور یون‌ها): جلوگیری از مخلوط‌شدن مستقیم دو الکترولیت و خنثی‌کردن بار الکتریکی محلول‌ها

- در آند، به دلیل اکسایش فلز، کاتیون تولید شده و به تدریج در نیم‌سلول آندی، غلظت کاتیون‌ها از آنیون‌ها بیشتر می‌شود (تجمع بار مثبت). در کاتد هم با کاهش یافتن کاتیون‌ها، به تدریج غلظت آنیون‌ها از کاتیون‌ها بیشتر می‌شود (تجمع بار منفی). برای ادامه واکنش‌های اکسایش - کاهش و قطع‌شدن جریان الکترون‌ها در مدار بیرونی باید محلول‌های دو الکترولیت از نظر بار الکتریکی خنثی باقی بمانند. این کار توسط دیواره متخلخل امکان‌پذیر است. منافذ بسیار ریز دیواره متخلخل سبب می‌شود تا یون‌های موجود در محلول‌ها به دلیل جاذبه الکتریکی بتوانند از آن عبور کنند؛ یعنی آنیون‌ها به سمت آند (محل تجمع بار مثبت) و کاتیون‌ها به سمت کاتد (محل تجمع بار منفی) مهاجرت کنند.

- جهت حرکت الکترون‌ها، در مدار خارجی از آند به سمت کاتد است.

- در دیواره متخلخل، کاتیون‌ها به سمت کاتد و آنیون‌ها به سمت آند حرکت می‌کنند.

- در سلول‌های گالوانی، معمولاً جرم الکتروتود آندی کاهش یافته و جرم الکتروتود کاتدی افزایش می‌یابد؛ به‌جز الکتروتود پلاتینی موجود در نیم‌سلول استاندارد هیدروژن (SHE). الکتروتود پلاتینی مورد استفاده در SHE محل انجام واکنش اکسایش یا کاهش است و خود فلز مصرف یا تولید نمی‌شود، بنابراین جرم آن ثابت است؛ چه در نقش آند و چه در نقش کاتد!
- در سلول گالوانی روی - مس، پس از مدتی جرم تیغه روی (آند) کم و جرم تیغه مس (کاتد) زیاد شده، زیرا به دلیل بیشتربودن واکنش‌پذیری روی نسبت به مس، در طی واکنش، هر اتم روی دو الکترون از دست می‌دهد و به شکل یون روی وارد محلول می‌شود. الکترون‌های تولیدشده در سطح الکتروتود روی، از طریق مدار بیرونی (سیم رابط) به سوی کاتد (الکتروتود مس) روانه می‌شوند. هر یون مس موجود در محلول کاتدی، این دو الکترون را می‌گیرد و به شکل اتم مس بر سطح تیغه می‌نشیند و باعث افزایش جرم تیغه می‌شود.





مرورنامه آزمون آزمایشی خیل سبز

شیمی

- اگر در سلول گالوانی به جای لامپ، ولتسنج قرار گیرد، ولتاژی که ولتسنج نشان می‌دهد، اختلاف پتانسیل میان دو نیم‌سلول است. کمیتی که به نیروی الکتروموتوری معروف است و با emf نمایش داده می‌شود.
- هر سلول گالوانی ولتاژ معینی دارد. در این سلول‌ها با تغییر هر یک از اجزای سلول، ولتاژ تغییر می‌کند.
- اندازه‌گیری پتانسیل یک نیم‌سلول به طور جداگانه ممکن نیست و این کمیت باید به طور نسبی اندازه‌گیری شود.

– سری الکتروشیمیایی –

- SHE، نیم‌سلول (یا الکتروود) استاندارد هیدروژن است که شامل یک الکتروود پلاتینی است که در محلولی با غلظت ۱ مولار H^+ (اسیدی) قرار دارد و گاز هیدروژن با فشار ۱ atm از روی تیغه رد شده و به داخل محلول اسیدی آن دمیده می‌شود.
- در این نیم‌سلول، نیم‌واکنش مقابل برقرار است:



- برای مقایسه پتانسیل الکتریکی نیم‌سلول‌های مختلف، نیم‌سلول استاندارد هیدروژن (SHE) را به عنوان مبنا انتخاب کردند و پتانسیل آن را برابر با صفر در نظر گرفتند و با تشکیل سلول گالوانی از هر نیم‌سلول با SHE، توانستند پتانسیل استاندارد بسیاری از نیم‌سلول‌ها را اندازه‌گیری کرده و آن‌ها را به ترتیب کاهشی در جدول ثبت کنند. جدول زیر، نمایی از این جدول را که به سری الکتروشیمیایی معروف است، نشان می‌دهد:

نیم‌واکنش کاهش			$E^\circ (V)$
گونه اکسند	الکترون	گونه کاهنده	ولتاژ
$Au^{3+}(aq)$	$+3e^- \rightarrow$	$Au(s)$	$+1/50$
$Pt^{2+}(aq)$	$+2e^- \rightarrow$	$Pt(s)$	$+1/20$
$Ag^+(aq)$	$+e^- \rightarrow$	$Ag(s)$	$+0/80$
$Cu^{2+}(aq)$	$+2e^- \rightarrow$	$Cu(s)$	$+0/34$
$2H^+(aq)$	$+2e^- \rightarrow$	$H_2(g)$	$0/00$
$Fe^{2+}(aq)$	$+2e^- \rightarrow$	$Fe(s)$	$-0/44$
$Zn^{2+}(aq)$	$+2e^- \rightarrow$	$Zn(s)$	$-0/76$
$Al^{3+}(aq)$	$+3e^- \rightarrow$	$Al(s)$	$-1/66$
$Mg^{2+}(aq)$	$+2e^- \rightarrow$	$Mg(s)$	$-2/37$

- در جدول نشان داده شده، نیم‌واکنش‌ها به شکل نیم‌واکنش کاهش نوشته شده‌اند و این پیشنهاد آیوپاک است که برای هماهنگی در همه منابع علمی معتبر به کار می‌رود. در هر نیم‌واکنش، گونه کاهنده در سمت راست و گونه اکسند در سمت چپ نوشته می‌شود.
- با توجه به این سری الکتروشیمیایی، واکنش اکسایش – کاهشی انجام‌پذیر است که در آن گونه‌ای که الکترون از دست می‌دهد، پایین‌تر از گونه‌ای که الکترون می‌گیرد، باشد.
- اندازه‌گیری‌های پتانسیل استاندارد نیم‌سلول‌ها در شرایط زیر انجام شده است:

۱ دمای $25^\circ C$

۲ فشار ۱ اتمسفر

۳ غلظت یک مولار برای محلول الکترولیت‌ها.

- در این شرایط، پتانسیل اندازه‌گیری‌شده را پتانسیل کاهشی استاندارد نیم‌سلول می‌نامند و با E° نمایش می‌دهند.
- برای ایجاد یک سلول گالوانی، عنصری با E° کم‌تر، نقش آند و عنصری با E° بیشتر، نقش کاتد را ایفا می‌کند و مقدار نیروی الکتروموتوری (emf) سلول از رابطه مقابل محاسبه می‌شود:

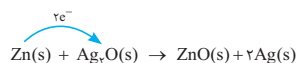
$$emf = E^\circ(\text{کاتد}) - E^\circ(\text{آند})$$

– لیتیم –

- لیتیم، فلزی ارزشمند برای ذخیره انرژی الکتریکی و در میان فلزات (نه همه عناصر) دارای کم‌ترین چگالی و کم‌ترین میزان E° است.
- لیتیم نقش پررنگی در ساخت باتری‌های جدید (سبک‌تر و با توانایی ذخیره انرژی بیشتر) دارد و در تلفن همراه و رایانه (قابل شارژ) و در باتری‌های دگمه‌ای کاربرد خیلی زیادی دارد.



- باتری‌های روی - نقره نیز از جمله باتری‌های دگمه‌ای هستند که در آن‌ها واکنش زیر انجام می‌شود. در این واکنش‌ها، فلز روی، نقش کاهنده (آند) و نقره اکسید نقش اکسنده (کاتد) را ایفا می‌کند.



- سالانه از میلیاردها باتری لیتیومی درون دستگاه‌های الکترونیکی در سرتاسر جهان استفاده می‌شود و سرانجام این دستگاه‌ها به همراه باتری‌های درون خود به شکل پسماند دور ریخته می‌شوند. به این ترتیب، حجم انبوهی از پسماندهای الکترونیکی تولید می‌شود. پسماندهایی مانند تلفن همراه و رایانه همراه، دارای باتری‌های لیتیومی بوده و به دلیل داشتن مواد شیمیایی گوناگون، سمی هستند و نباید در طبیعت رها یا دفن شوند زیرا محیط زیست را آلوده می‌کنند. از سوی دیگر، برخی از این پسماندها به دلیل داشتن مقدار قابل توجهی از مواد و فلزهای ارزشمند و گران‌قیمت، منبعی برای بازیافت این مواد هستند.